詳細解答

STEP I 2017，第 6 題

純數學 • 積分與符號變化

STEP I 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q6

關鍵思路

一個從不變號、又不恆等於零的連續函數（continuous function），其積分（integral）必定不為零：它在某個小區間上與零保持距離，單是這個區間的貢獻已經不為零。第 (i) 部分把這個想法嚴格化，而第 (ii) 及 (iii) 部分則把它應用到一些巧妙選取的函數上。在 (ii) 中，被積函數（integrand）$(x-\alpha)^2 g(x)$ 與 g 同號；在 (iii) 中，分部積分（integration by parts）把關於 h 的資料轉化為 h' 滿足 (ii) 的條件。

解答

第 (i) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設 f 在 $[0,1]$ 上並非同時取正值和負值。那麼，要麼對 $[0,1]$ 中所有 x 都有 $f(x) \geq 0$，要麼對所有這些 x 都有 $f(x) \leq 0$。如有需要，以 $-f$ 代替 f（這既不改變假設 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，也不改變結論），我們可假設 $f(x) \geq 0$ 處處成立。

題目告訴我們，對某個 $c \in [0,1]$ 有 $f(c) \neq 0$，因此 $f(c) > 0$。由於 f 在 c 處連續，存在 $\delta > 0$，使得對 $[0,1]$ 中所有滿足 $|x-c| < \delta$ 的 x，都有 $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$。這個集合包含一個長度 $q-p$ 為正的區間 $[p,q] \subseteq [0,1]$（若 $c \leq \frac{1}{2}$，取 $[c,\, c+\eta]$；若 $c > \frac{1}{2}$，取 $[c-\eta,\, c]$，其中 $0 < \eta < \delta$ 且 $\eta \leq \frac{1}{2}$）。由於 $f \geq 0$ 處處成立，

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2} f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

這與 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾。因此 f 在 $[0,1]$ 上同時取正值和負值。

想一想 為甚麼單憑「$f \geq 0$ 且 $f(c) > 0$，所以積分是正數」並不足夠？

一個函數可以只在單一點上為正，而積分完全察覺不到；單一點是沒有寬度的。正是連續性把 c 處的正值擴展到一個長度為正的區間上，這才迫使積分為正。

第 (ii) 部分

展開平方並利用三個條件 $(*)$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

現在用反證法，假設對每個 $x \in [0,1]$ 都有 $g(x) \neq 0$。那麼 g 不可能在 $[0,1]$ 上同時取兩種符號（否則根據題目開首的假設，它會在某處等於零），所以 g 要麼處處嚴格為正，要麼處處嚴格為負。

設 $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$，它是連續的。由於 $(x-\alpha)^2 \geq 0$，凡 f 不為零之處，它都與 g 同號，所以 f 不會同時取兩種符號。但 f 在 $[0,1]$ 中某處不為零：$(x-\alpha)^2$ 只在 $x=\alpha$ 處等於零，所以除了(可能的)α 之外，對每個 $x \in [0,1]$ 都有 $f(x) \neq 0$。而且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。根據第 (i) 部分，$f$ 必須同時取兩種符號，矛盾。因此對 $[0,1]$ 中某個 x，有 $g(x) = 0$。

一個線性例子。設 $g(x) = a + bx$，則條件 $(*)$ 變為

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

由第一式得 $a = 1 - \frac{1}{2}b$；代入第二式得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$，所以

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

於是第三個條件變為

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha) + \tfrac{1}{4}(12\alpha - 6) = \alpha - \tfrac{1}{6} = \alpha^2,$$

即 $6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$，所以

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

留意 α 並非可以隨意選取：線性的 g 只在這兩個值下才成立。取 $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$，得 $b = 2\sqrt{3}$ 及 $a = 1 - \sqrt{3}$，所以

$$g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x,$$

它在

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211,$$

處等於零，而這點位於 $[0,1]$ 內，正如第 (ii) 部分所說必然如此。(另一個選擇 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 給出 $g(x) = 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,x$，它在 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ 處等於零，同樣位於 $[0,1]$ 內。)

第 (iii) 部分

我們證明 $g = h'$ 滿足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。這裏 h' 是連續的，符合第 (ii) 部分的要求。首先，

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = 1.$$

以 $u = x$、$\mathrm{d}v = h'(x)\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xh(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \beta.$$

再進行一次分部積分，這次取 $u = x^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^2h(x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \beta(2-\beta) = 1 - 2\beta + \beta^2 = (1-\beta)^2.\end{aligned}$$

> ? **想一想** 那個古怪的值 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 是從哪裏來的？

它正是為了令第三個積分等於第二個積分的平方而特意選取的。經過兩次分部積分後，第二個積分是 $1-\beta$，所以我們需要第三個積分等於 $(1-\beta)^2$，而 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 恰好做到這一點。

所以 h' 是連續的，並且滿足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。根據第 (ii) 部分，對 $[0,1]$ 中某個 x，有 $h'(x) = 0$。

驗算

- 對於 $g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x$，直接積分得 $\int_0^1 g = 1$、$\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$ 及 $\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$。
- 第 (iii) 部分可用 $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$ 來測試，它的導數（derivative）正是上面的 g。那麼 $h(0) = 0$、$h(1) = 1$、$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$，以及 $\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$。它的導數在 $x \approx 0.211$ 處等於零，所以 h 在 $[0,1]$ 內有一個轉向點（turning point），與預測相符。

常見錯誤

- 在 (i) 中，不用連續性便論證「$f \geq 0$，所以 $\int f > 0$」。一個非負函數可以積分為零而又不處處為零（例如只在一點上不為零），所以連續性是不可或缺的。
- 在 (ii) 中，把 (i) 應用到 g 本身。我們對 $\int g$ 除了知道它等於 1 之外一無所知；第 (i) 部分必須應用到 $(x-\alpha)^2 g$ 上，而且我們必須驗證這個函數在某處不為零。

► 在 (iii) 中，忘記了 h' 必須連續，(ii) 才可應用。正因如此，題目才說 h 有連續的導數。

STEP 之外

條件 $(*)$ 表示：如果 g 是一個概率密度（probability density），它的平均值（mean）便是 α，而它的方差（variance）$\int (x-\alpha)^2 g = 0$。真正的概率密度不可能有零方差，這就是為甚麼 g 必須在某處跌至零以下。第 (i) 部分是實分析（real analysis）中的一條標準引理（lemma）：一個連續、非負且積分為零的函數必定恆等於零。它經常被使用，例如在變分法（calculus of variations）中。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續性和黎曼積分（Riemann integral）的發展足夠嚴謹，既可證明這條引理，也可證明題目容許你假設的介值定理（intermediate value theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。