詳細解答

STEP I 2017，第 5 題

純數學 • 以微分法求最優值

STEP I 2017，第 5 題

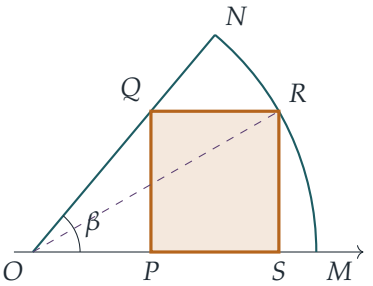
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q5

關鍵思路

頂點的位置一旦定下來，一切就只由單一變量 x 決定：Q 位於 P 的正上方，在直線 $y = x\tan\beta$ 上；R 與 Q 同高，位於圓上。利用畢氏定理（Pythagoras' theorem）可把 s 以 x 表示，於是面積變成一個普通的單變量函數，可以直接求導。最後的角度條件則可由 tan 的半角公式（half-angle formula）直接得出。

解答



面積

由於 $PQRS$ 是長方形，且 P 和 S 都在 x 軸上，所以邊 PQ 和 SR 都是鉛垂的。因此 Q 的 x 坐標是 x。它位於 ON 上，即直線 $y = x\tan\beta$ 上，所以 $Q = (x, x\tan\beta)$，而 $R = (s, x\tan\beta)$。長方形的闊為 $PS = s - x$（這是正數，因為 S 比 P 離 O 更遠），高為 $PQ = x\tan\beta$，所以

$$A = x(s - x)\tan\beta,$$

正如所求。

求 s 及 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$

由於 R 在圓上，$OR = a$，所以 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。因為 $s > 0$，

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

對 $s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得 $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$。現在把面積寫成 $A = (xs - x^2)\tan\beta$，並對 xs 使用乘積法則（product rule）：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s - 2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

最大面積

首先考慮 x 的範圍。當 x 從 0 開始增加時，Q 沿 ON 向上移動，R 則沿圓弧向 N 移動；當 R 到達 N 時，長方形收縮成一條鉛垂線段，即 $x = a\cos\beta$ 時（此時 $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$）。所以 $0 < x < a\cos\beta$，而 A 是 $[0, a\cos\beta]$ 上的連續函數，兩端的值都是 $A = 0$，中間則 $A > 0$。因此它的最大值必定出現在區間內部的一個駐點（stationary point）。

設 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$，除以 $\tan\beta > 0$ 再乘以 $s > 0$：

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1 + \tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s - x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

想一想 應該取哪一個平方根？我們又怎樣知道這是最大值？

$s - x$ 和 $x\sec\beta$ 都是正數（因為 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$），所以 $s - x = x\sec\beta$；另一個根會令 $s - x$ 為負數。因此在 $0 < x < a\cos\beta$ 內恰好只有一個駐點，由

$$s = x(1 + \sec\beta),$$

給出，而根據上一段，它必定給出最大面積。

要求出該面積，把它代入 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。利用 $\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$，

$$(1 + \sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1 + \sec\beta),$$

所以

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

在這一點，$s - x = x\sec\beta$，所以

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac12\beta\cos\frac12\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac12\beta} = \tfrac12 a^2\tan\tfrac12\beta,$$

這裏用了 $\sin\beta = 2\sin\frac12\beta\cos\frac12\beta$ 及 $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac12\beta$。

角 ROS

在直角三角形 ORS 中，$\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$。在最大值處，

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\tfrac12\beta,$$

用的是同樣的兩條半角恆等式。$\angle ROS$ 和 $\frac12\beta$ 都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間上是一一對應（one-to-one）的，所以 $\angle ROS = \frac12\beta$：在最佳的長方形中，$OR$ 平分扇形。

驗算

- 取 $a = 1$、$\beta = \frac{\pi}{3}$。則 $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$，$s = 3x$，而 $A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$，正好等於 $\frac12\tan\frac{\pi}{6}$。以電腦對大量隨機的 a 和 β，在 x 的細密網格上搜尋，得到相同的最大值和相同的最佳 x。
- 當 $\beta\to 0$ 時，扇形收縮，而 $\frac12 a^2\tan\frac12\beta\to 0$，理應如此。
- 單位：A 是 a^2 乘以一個純數，所以它確實是面積。

常見錯誤

- 忘記 s 依賴於 x，把 s 當作常數去對 $x(s-x)\tan\beta$ 求導。
- 把 $s - x = -x\sec\beta$ 也一併接受，或沒有說明為何該駐點是最大值。

STEP 之外

答案如此整齊——OR 正好沿扇形的角平分線——背後有一個漂亮的解釋：若 $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$，簡短計算可得 $A = \frac12 a^2\big(\cos(2\theta-\beta) - \cos\beta\big)/\sin\beta$，顯然在 $\theta = \frac12\beta$ 時

取得最大值。選對變量，可以令最優化（optimisation）問題幾乎變得輕而易舉。在大學裏，你會學到多變量的約束最優化（constrained optimisation），屆時不必消去 s，而可以用拉格朗日（Lagrange）乘數法（Lagrange multipliers），在 $s^2 + x^2 \tan^2 \beta = a^2$ 的約束下求 $x(s - x)$ 的最大值。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多同類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。