詳細解答

STEP I 2017，第 4 題

純數學 • 二次方程與等比級數

> **STEP I 2017，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

關鍵思路

一切取決於開區間（open interval）$(-1,1)$ 內有多少個 r 值會給出某個特定的 p（或 q）值。這其實是關於一條限制在 $-1 < r < 1$ 上的拋物線（parabola）的問題：一條水平直線與它相交一次、兩次或完全不相交，而草圖會告訴我們是哪一種情況。一旦知道 r，和便隨之確定；又因為和是 r 的一一對應（one-to-one）函數，兩個不同的 r 值必定給出兩個不同的和。要找出這些和所滿足的方程，我們把 r 用和來表示，然後代入。

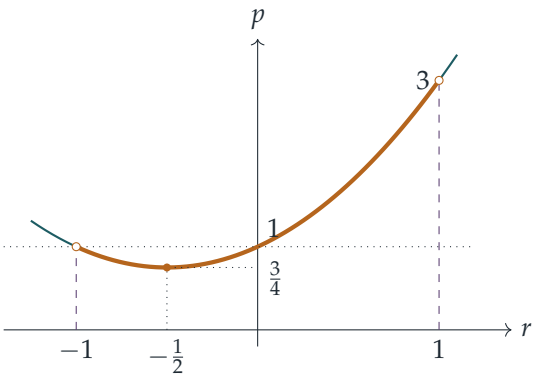
解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$1 + r + r^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4},$$

因此圖像是一條拋物線，其最小點（minimum point）為 $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)$。它經過 $(-1,1)$、$(0,1)$ 和 $(1,3)$。



在 $-1 < r < 1$ 上（粗線那段弧），函數由 1（取不到，因為 $r = -1$ 被排除）遞減至 $r = -\frac{1}{2}$ 處的最小值 $\frac{3}{4}$，然後遞增趨向 3（同樣取不到，因為 $r = 1$ 被排除）。因此

$$\tfrac{3}{4} \le p < 3.$$

當 $1 < p < 3$ 時。給出這個 p 的 r 值是以下方程的根（roots）：

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

兩根之積為 $1 - p < 0$，所以有一個正根和一個負根。兩根之和為 -1，所以負根等於 -1 減去正根，即小於 -1，因此不容許。正根為

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

又因為 $1 < 4p - 3 < 9$，我們有 $0 < r < 1$，所以這個根是容許的。（從圖像看：高度為 $p \in (1,3)$ 的直線只在上升部分 $0 < r < 1$ 與粗線弧相交。）所以 p 唯一確定 r，從而唯一確定 $S = 1/(1 - r)$。

當 $\frac{3}{4} < p < 1$ 時。此時判別式（discriminant）$1 - 4(1 - p) = 4p - 3$ 為正，所以這個二次方程（quadratic）有兩個相異實根。兩根之積 $1 - p$ 為正，兩根之和為 -1，所以兩根皆為負。每個根都等於 -1 減去另一個根，而另一個根是負數，所以每個根都大於 -1。因此兩根都位於 $(-1, 0)$ 內，兩者皆容許。

? **想一想** 有兩個 r 值，沒問題；但為甚麼它們一定給出兩個不同的 S 值？

因為 $S = \dfrac{1}{1 - r}$ 可以反過來寫成 $r = 1 - \dfrac{1}{S}$。因此不同的 r 值給出不同的 S 值，所以 S 恰好有兩個可能值。

要找出它們滿足的方程，把 $r = 1 - u$（其中 $u = 1/S$）代入 $r^2 + r + 1 - p = 0$：

$$(1 - u)^2 + (1 - u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3 - p) = 0.$$

代入 $u = 1/S$ 並乘以 S^2（它不為零），得

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

正如所求。由於兩個 S 值都來自容許的根 r，它們都滿足這個方程。

第 (ii) 部分

再次配方，

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

最小值為 $r = -\frac{1}{3}$ 處的 $\frac{2}{3}$；在 $r = -1$ 處的值為 2，在 $r = 1$ 處的值為 6。所以在 $-1 < r < 1$ 上：

- 在下降部分 $-1 < r \le -\frac{1}{3}$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$ 中每個值恰好一次；
- 在上升部分 $-\frac{1}{3} \le r < 1$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$ 中每個值恰好一次。

兩部分只共有 $r = -\frac{1}{3}$ 這一點。因此一個 q 值來自

- 恰好一個 r：若 $q = \frac{2}{3}$（即 $r = -\frac{1}{3}$）或 $2 \le q < 6$（只在上升部分）；
- 恰好兩個 r 值：若 $\frac{2}{3} < q < 2$（每部分各一個）；
- 其他情況下沒有任何 r。

例如在 $q = 2$ 時，方程 $3r^2 + 2r - 1 = 0$ 可因式分解為 $(3r-1)(r+1) = 0$，而根 $r = -1$ 被排除，只剩下 $r = \frac{1}{3}$。

和之前一樣，T 確定 r：由於 $1 - r > 0$，我們有 $1 - r = 1/\sqrt{T}$。所以不同的 r 給出不同的 T。因此

$$T \text{ 唯一確定，當} q = \tfrac{2}{3} \text{ 或} 2 \le q < 6,$$

以及

$$T \text{ 有兩個可能值，當} \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

二次方程。設 $r = 1 - u$，其中 $u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$。則

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

由於 $u^2 = 1/T$，上式即 $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$。乘以 T，

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

這已經是一個關於 $\sqrt{T}$ 的二次方程。要得到關於 T 本身的方程，把兩邊平方：

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

即

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

T 的兩個可能值都滿足這個方程。這裏平方不可能引入多餘的根。由於 $q < 6$ 且 $T > 0$，左邊 $(6-q)T + 3$ 為正，所以另一種可能 $(6-q)T + 3 = -8\sqrt{T}$ 沒有 $T > 0$ 的解。此外，關於 T 的二次方程兩根之積 $9/(6-q)^2$ 為正，兩根之和亦為正，所以兩根皆為正。因此它的兩個根正好就是 T 的兩個值。

驗算

- 取 $p = \frac{7}{8}$。則 $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$ 給出 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$，兩者皆在 $(-1,0)$ 內。相應的和 $S \approx 0.873$ 及 $S \approx 0.540$ 滿足 $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$，其兩根之和為 $\frac{24}{17} \approx 1.412$，積為 $\frac{8}{17}$。
- 取 $q = 1$。則 $3r^2 + 2r = 0$ 給出 $r = 0$ 或 $r = -\frac{2}{3}$，所以 $T = 1$ 或 $T = \frac{9}{25}$。二次方程變成 $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$，與預期相符。
- 在邊界 $q = \frac{2}{3}$ 處，二次方程為 $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$，判別式為 $1024 - 1024 = 0$。它有重根 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$，與唯一的值 $r = -\frac{1}{3}$ 吻合。
- 我們用電腦檢驗了各範圍內數以千計的隨機 p 和 q 值：根的個數及兩條二次方程都一致。

常見錯誤

- 忘記 $r = \pm 1$ 被排除，以致錯誤地把 $p = 1$ 歸入「兩個值」的情況，並把 $q = 2$ 排除在「唯一」的集合之外。
- 遺漏孤立的值 $q = \frac{2}{3}$（頂點（vertex）），在該處 T 同樣唯一。
- 平方後沒有檢查是否引入了多餘的根。

STEP 之外

這道題其實是在問函數何時可逆（invertible）：映射 $r \mapsto p$ 在定義域（domain）的一部分上是一一對應的，在其餘部分上則是二對一的，而答案取決於定義域，不只取決於公式。級數 $\sum r^n$ 和 $\sum nr^{n-1}$ 分別是一個冪級數（power series）及其逐項求導所得的導數（term-by-term derivative）。為甚麼在收斂半徑（radius of convergence）之內可以逐項求導，是大學一年級分析（analysis）課程的標準結果。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對冪級數和一致收斂（uniform convergence）的處理既嚴謹又易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。