詳細解答

STEP I 2017，第 3 題

純數學 • 拋物線的切線

> **STEP I 2017，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

關鍵思路

這裏的一切都可以用參數（parameter）p 和 q 表示，所以計劃是先求出 R、S、T 的坐標，然後直接計算兩個面積。三角形 RST 特別容易處理，因為它的邊 ST 落在 y 軸上：它的高就是 R 到該軸的距離。至於三角形 OPQ，由於它有一個頂點在原點，公式 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 一行就能完成計算。

解答

P 處的切線

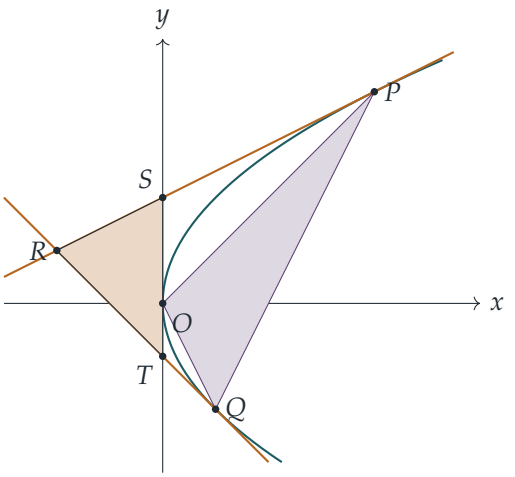
對 $y^2 = 4ax$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$。在 P 點，$y = 2ap \neq 0$（因為 $a, p > 0$），斜率（gradient）為

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

因此通過 $P(ap^2, 2ap)$ 的切線（tangent）是

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}x - ap + 2ap = \frac{1}{p}x + ap,$$

正如所求。同理，由於 Q 的形式相同，只是以 q 代替 p（且 $q \neq 0$），Q 處的切線是 $y = \dfrac{1}{q}x + aq$。



草圖展示的是 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ 的情況：R 位於 y 軸左方，高度介乎 S 與 T 之間。

點 R、S 和 T

在每條切線中代入 $x = 0$，得

$$S = (0,\, ap), \qquad T = (0,\, aq).$$

兩條切線在 R 相交，所以

$$\frac{x}{p} + ap = \frac{x}{q} + aq \quad \Longrightarrow \quad x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = a(q-p) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \frac{q-p}{pq} = a(q-p).$$

由於 $p > 0 > q$，有 $q - p \neq 0$，因此可以除以它（這也說明了兩條切線並不平行，R 確實存在）。於是 $x = apq$，再得 $y = \dfrac{apq}{p} + ap = a(p+q)$：

$$R = (apq,\, a(p+q)).$$

? **想一想** R 在 y 軸的哪一邊？為甚麼這對計算面積很重要？

因為 $p > 0$ 而 $q < 0$，乘積 pq 是負數，所以 R 的 x 坐標 apq 是負的：R 在軸的左方，與軸的距離為 $a|pq| = -apq$。面積必須是正數，所以我們要留意正負號，而不是把 apq 寫成「高」。

三角形 RST 的面積

以 ST 為底。它落在 y 軸上，長度為 $ap - aq = a(p-q)$，由於 $p > q$，這是正數。由 R 到 y 軸的垂直高度是 $-apq$。所以

$$[RST] = \tfrac{1}{2} \cdot a(p-q) \cdot (-apq) = -\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

三角形 OPQ 的面積

對於頂點為 O、(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的三角形，面積是 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$。取 $P(ap^2, 2ap)$ 和 $Q(aq^2, 2aq)$，

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

這裏 $a^2 > 0$、$pq < 0$ 且 $p - q > 0$，所以這個值是負的，因此

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot (-2a^2pq(p-q)) = -a^2pq(p-q).$$

結論

比較兩個結果，

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

所以三角形 OPQ 的面積是三角形 RST 面積的兩倍，正如所求。

驗算

在草圖的情況 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ 中，得 $P(4,4)$、$Q(1,-2)$、$R(-2,1)$、$S(0,2)$ 和 $T(0,-1)$。於是 $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$，而 $[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$，正好是兩倍。你也可以驗證 R 同時滿足兩條切線方程：$1 = \frac{-2}{2} + 2$ 及 $1 = \frac{-2}{-1} - 1$。這個恆等式亦已用電腦以精確算術，對 2000 組隨機選取的 a、p、q 驗證過。

常見錯誤

- 把三角形 RST 的高寫成 apq：這是負數，因為 R 位於 y 軸上與曲線相反的一側。
- 在 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 中漏掉絕對值（modulus），結果得出 OPQ 的面積為負數。
- 除以 $q - p$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

參數化（parametrisation）$(at^2, 2at)$ 使拋物線（parabola）上每一點都對應一個數 t，而 $t = p$ 和 $t = q$ 處的切線總是相交於 $(apq, a(p+q))$：即兩個參數的「積」與「和」。這類結果，連同本題的 2 : 1 面積比，都屬於圓錐曲線（conics）的古典射影幾何（projective geometry），在這門學問中，切線和弦都是借助參數和行列式（determinant）來研究的。三角形面積的行列式公式，是把面積看成一種有向（signed）、線性的量的起點，這方面的發展可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）；Siklos 的

Advanced Problems in Mathematics（《數學進階問題》）則有更多關於參數曲線的 STEP 式練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。