詳細解答

STEP I 2017，第 2 題

純數學 • 對不等式積分

> **STEP I 2017，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

關鍵思路

積分（integration）保持不等式（inequality）：若在區間 $[a,b]$（其中 $a<b$）上 $f(t)\le g(t)$，則 $\int_a^b f \le \int_a^b g$。唯一要小心的是積分的方向：當 $x<1$ 時，區間 $[1,x]$ 是倒過來走的，不等式便會反轉。最後一部分再次用到同一個想法：把一個非負（non-negative）函數由 1 積分到 y，所得結果與 $y-1$ 同號，而這個符號正是我們安全地除去該因子所需要的。

解答

第 (i) 部分

情況 $x\ge 1$。當 $1\le t\le x$ 時，有 $\frac{1}{t}\le 1$，而且區間是正向的，所以

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \ln x \le x-1.$$

情況 $0<x\le 1$。現在我們在 $x\le t\le 1$ 上積分，此時 $t\le 1$，故 $\frac{1}{t}\ge 1$。於是

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad -\ln x \ge 1-x.$$

乘以 -1 會令不等式反轉，再次得到 $\ln x\le x-1$。所以 $(*)$ 對所有 $x>0$ 成立。

第 (ii) 部分

情況 $x\ge 1$。當 $t\ge 1$ 時，有 $\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{t}$，所以

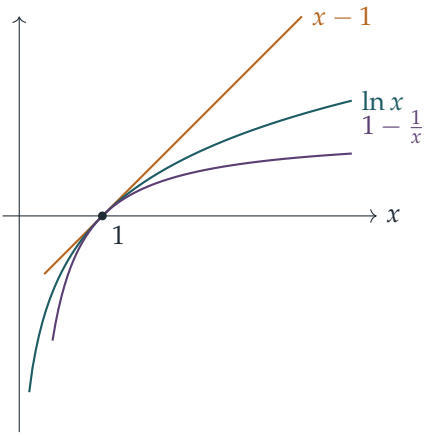
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad 1-\frac{1}{x}\le \ln x.$$

情況 $0 < x \le 1$。當 $x \le t \le 1$ 時，不等式反轉為 $\frac{1}{t^2} \ge \frac{1}{t}$（把 $t \le 1$ 乘以正數 $\frac{1}{t^2}$）。在 $[x, 1]$ 上積分，

$$\frac{1}{x} - 1 \ge -\ln x,$$

再乘以 -1 便得 $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$。所以 $(**)$ 對所有 $x > 0$ 成立。

（另一方法：$(**)$ 可由 $(*)$ 直接推出：在 $(*)$ 中以 $1/x$ 代替 x，即得 $-\ln x \le \frac{1}{x} - 1$。）



三條曲線在 $x = 1$ 處相切，每條在該點的斜率（gradient）都是 1；$\ln x$ 被夾在另外兩條曲線之間。

第 (iii) 部分

$(*)$ 和 $(**)$ 都是說某個函數在 $x > 0$ 上非負：

$$f(x) = x - 1 - \ln x \ge 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \ge 0.$$

我們需要一個關於積分這類函數的簡單事實。

? **想一想** 若對所有 $x > 0$ 都有 $h(x) \ge 0$，那麼當 $y < 1$ 時，$\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$ 的符號是甚麼？

若 $y > 1$，積分是在正向區間上進行，所以結果 ≥ 0。若 $0 < y < 1$，則 $\int_1^y h = -\int_y^1 h \le 0$。無論哪種情況，都有

$$(y - 1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \;\ge\; 0.$$

這讓我們可以把 $y > 1$ 和 $0 < y < 1$ 兩種情況一併處理。

我們需要 $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$（以 $u = \ln x$ 用分部積分法（integration by parts）求得），所以

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

右邊的不等式。對 f 積分，

$$\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y$$
$$= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.$$

由上述事實，

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

由於 $y > 0$ 且 $y \neq 1$，$y(y-1)^2$ 是正數，除以它不會改變不等式的方向：

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

左邊的不等式。對 g 積分，

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

由上述事實，

$$(y-1)[(y+1)\ln y - 2(y-1)] \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

現在除以 $(y+1)(y-1)^2 > 0$：

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

把兩者合起來，

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{對} y > 0,\ y \neq 1,$$

得證。

想一想 為甚麼要先乘以 $y-1$ 再除，而不是直接除？

把不等式除以 $y-1$，在 $y < 1$ 時會令不等式反轉，迫使我們分開兩種情況處理。先乘以 $y-1$，所得的式子含有 $(y-1)^2$，無論我們在 1 的哪一邊它都是正數，因此一個論證便可涵蓋兩種情況。

驗算

- 當 $y = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.667 \leq \ln 2 \approx 0.693 \leq \frac{3}{4} = 0.75$。
- 當 $y = \frac{1}{2}$：$\frac{4}{3} \approx 1.333 \leq 2\ln 2 \approx 1.386 \leq \frac{3}{2}$。

- 當 $y \to 1$ 時，三個式子都趨向 1（中間那個是 ln 在 1 處的斜率），與圖中曲線相切的情況一致。
- 以 $1/y$ 代替 y，再全式除以 y，會得回完全相同的一對不等式，所以 $0 < y < 1$ 的結果與 $y > 1$ 的結果是等價的。

常見錯誤

- 當 $x < 1$ 時在 $[1, x]$ 上積分，卻沒有留意到不等式會反轉。
- 除以 $y - 1$ 時沒有考慮它的符號，結果只證明了 $y > 1$ 時的第 (iii) 部分。

STEP 之外

中間的量 $\dfrac{\ln y}{y-1}$ 是 1 與 y 的*對數平均*（logarithmic mean）的倒數，所以左邊的不等式是說對數平均不大於算術平均（arithmetic mean）$\frac{1+y}{2}$。事實上，對數平均亦不小於幾何平均（geometric mean）$\sqrt{y}$，由此得 $\frac{\ln y}{y-1} \le \frac{1}{\sqrt{y}}$，這是比 $\frac{y+1}{2y}$ 更精確的上界。對不等式積分這個技巧，以及支持它的積分單調性（monotonicity），都是大學第一門數學分析（analysis）課程的基本工具。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對積分有細緻的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。