詳細解答

STEP I 2017，第 13 題

概率與統計 • 概率的遞推關係

> **STEP I 2017，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q13

關鍵思路

逐片麵包去看，問它是怎樣被用掉的：它可以做多士，可以是三文治的第一片，也可以是三文治的第二片。三者恰好發生其一，而前一片麵包的情況決定了哪幾種是可能的。若第 $r-1$ 片完成了一份小食，第 r 片便開始一份新的小食；若沒有完成，第 r 片必然是某份三文治的後半。這樣便得到一個一階遞推關係（first-order recurrence），我們用慣常的技巧——減去不動點（fixed point）——來求解。

解答

設定

按使用次序把麵包編號為 $1, 2, \ldots, n$。對每一片麵包 r，以下情況恰好發生其一：

- T_r：第 r 片用來做多士；
- A_r：第 r 片是某份三文治兩片麵包中的第一片；
- S_r：第 r 片是某份三文治兩片麵包中的第二片。

因此 $t_r = \mathrm{P}(T_r)$、$s_r = \mathrm{P}(S_r)$，而 $\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$。若 T_r 或 S_r 發生，我們說第 r 片完成一份小食；其概率為 $s_r + t_r$。

第一片麵包開始第一份小食，所以它不可能是三文治的第二片：

$$s_1 = 0.$$

（此外，若 $n \geq 2$ 則 $t_1 = p$；若 $n = 1$ 則 $t_1 = 1$。）

兩條方程

關於 t_r 的方程。第 r 片開始一份新小食，當且僅當第 $r-1$ 片完成一份小食，其概率為 $s_{r-1}+t_{r-1}$。已知第 r 片開始一份小食，餘下的是第 $r, r+1, \ldots, n$ 片；當 $r \le n-1$ 時至少有兩片，所以無論之前發生了甚麼，我選擇多士的概率都是 p。若第 $r-1$ 片沒有完成小食，第 r 片便完成一份三文治，不是多士。因此

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \le r \le n-1).$$

這條式在 $r = n$ 時不成立，因為從最後一片開始的小食必定是多士。

關於 s_r 的方程。第 r 片是三文治的第二片，當且僅當第 $r-1$ 片是三文治的第一片，即第 $r-1$ 片沒有完成小食。所以

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \le r \le n).$$

這裏不需要對餘下片數加任何條件，所以此式一直成立至 $r = n$。

s_r 的遞推關係

把第二條方程中的 r 換成 $r+1$，得 $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$，所以第一條方程可寫成

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \le r \le n-1).$$

當 $n \ge 2$ 時，此式對 $r = 1$ 亦成立，因為 $t_1 = p$ 且 $s_1 = 0$。把 $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$（在 $1 \le r-1 \le n-1$ 時成立）代入 s_r 的方程：

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

此式對 $2 \le r \le n$ 成立，特別地對 $2 \le r \le n-1$ 成立，正如所求。

解遞推關係

> **想一想** 怎樣解 $s_r = q - q s_{r-1}$？哪個常數數列滿足它？

常數解 $s_r = c$ 需要 $c = q - qc$，所以 $c = \dfrac{q}{1+q}$。從遞推關係減去 $c = q - qc$，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

所以 $s_r - \frac{q}{1+q}$ 每一步都乘以 $-q$。由 $s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$ 開始，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

從而得到

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

（由於遞推關係一直成立至 $r = n$，同一公式其實對 $r = n$ 亦成立。）

至於 t_r，我們利用 $t_r = p(1 - s_r)$ 及

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

所以

$$t_r = \frac{p\big(1 - (-q)^r\big)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

最後一片

如上所述，s_r 的方程及遞推關係 $s_r = q(1 - s_{r-1})$ 對 $r = n$ 亦成立，所以公式延續下去：

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

最後一片不可能是三文治的第一片，因為之後再沒有麵包。所以它要麼是多士，要麼是三文治的第二片，故 $t_n = 1 - s_n$：

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

與 $r < n$ 時的 t_r 相比，因子 p 消失了：一份小食若從最後一片開始，必定是多士。（這些公式在 $n = 1$ 時亦成立：它們給出 $s_1 = 0$ 及 $t_1 = 1$。）

驗算

- 取 $n = 3$ 及 $p = q = \frac{1}{2}$。可能的次序有：多士—多士—多士（概率 $\frac{1}{4}$）、先多士後三文治（概率 $\frac{1}{4}$）、先三文治後多士（概率 $\frac{1}{2}$）。所以 $s_3 = \frac{1}{4}$ 而 $t_3 = \frac{3}{4}$。公式給出 $s_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$ 及 $t_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$。
- 當 $q = 0$（永遠做多士）時，對每個 r 都得 $s_r = 0$ 及 $t_r = 1$，理應如此。
- 當 r 增大時，$s_r \to \frac{q}{1+q}$。這是合理的：長遠而言，有比例 q 的小食是三文治，每份有一片「第二片」，而每份小食平均用 $1 + q$ 片麵包，所以有比例 $\frac{q}{1+q}$ 的麵包是第二片。
- 我們用電腦對 $n \le 12$ 及若干 p 值，精確列舉所有小食序列，驗證了全部公式。

常見錯誤

- 使用 $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$：當一份小食從最後一片開始時，它是多士的概率是 1，而不是 p。
- 以為事件「第 $r-1$ 片是多士」與「第 r 片是多士」互相獨立（independent）。其實並不獨立：關鍵在於第 r 片是否開始一份小食，而這取決於之前的歷史。
- 解遞推關係時丟失負號：公比是 $-q$，所以答案圍繞 $\frac{q}{1+q}$ 交替擺動。

STEP 之外

第 r 片是否開始一份新小食，構成一個簡單的*更新過程*（renewal process）：各份小食的長度互相獨立，每份是 1 或 2，而極限 $\frac{q}{1+q}$ 正是更新定理（renewal theorem）的一個例子（長遠的更新率等於平均間隔的倒數）。等價地，每片麵包的類型構成一條馬可夫鏈（Markov chain），而 $(-q)^r$ 顯示它遺忘起始狀態的速度。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）同時涵蓋馬可夫鏈及這類遞推關係。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。