詳細解答

STEP I 2017，第 11 題

力學 • 涉及摩擦力的剛體靜力學

> **STEP I 2017，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

關鍵思路

一切都發生在箱子的一個鉛垂截面內，而這個截面是一個傾斜了 α 的正方形。因此自然的坐標軸應沿箱底和沿箱側向上，而不是水平和鉛垂方向：這樣兩個法向反作用力（normal reaction）都沿坐標軸，只有重量需要分解。兩次分解力給出法向反作用力之間的一條關係，對中點取力矩（moment）的方程（重量在此不產生力矩）給出第二條關係，再利用 tan 的複角公式（compound-angle formula）比較兩者，便得出答案。

解答

模型與受力

把桿視為均勻剛性桿（uniform rigid rod），並在包含它的鉛垂平面內討論。在這個平面內，箱底沿最大斜率線（line of greatest slope）放置，與水平成角 α，而經過 O 的箱側與箱底垂直。在 O 取坐標軸：

- x 沿箱底，指向斜面上方（朝向 A）；
- y 沿箱側，垂直於斜面（朝向 B）。

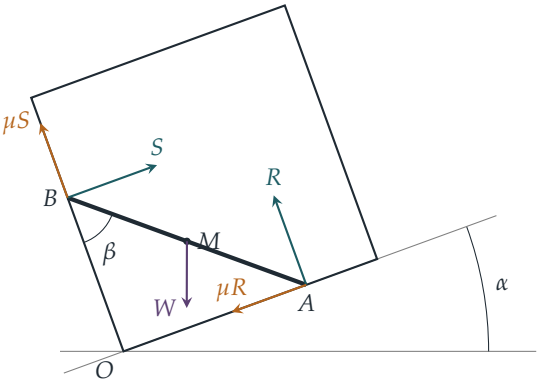
箱側與箱底垂直，所以三角形 OAB 在 O 處為直角，而 B 處的角為 β。因此

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

設 $\mu = \tan\gamma$。桿所受的力為：

- 在 A：沿 $+y$ 方向的法向反作用力 R，以及朝向 O（即 $-x$ 方向）的摩擦力 μR，因為 A 即將向遠離 O 的方向滑動，而摩擦力處於極限狀態（limiting）；

- 在 B：沿 $+x$ 方向的法向反作用力 S，以及遠離 O（即 $+y$ 方向）的摩擦力 μS，因為 B 即將朝 O 滑動；
- 作用於中點 M、鉛垂向下的重量 W。y 軸與向上的鉛垂方向成角 α，所以重量沿 x 的分量為 $-W\sin\alpha$，沿 y 的分量為 $-W\cos\alpha$。



分解力

沿箱底（x）及沿箱側向上（y）：

$$S-\mu R-W\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$R+\mu S-W\cos\alpha=0. \tag{2}$$

由於 $R+\mu S=W\cos\alpha\neq 0$，把 (1) 除以 (2) 得

$$\frac{S-\mu R}{R+\mu S}=\tan\alpha. \tag{3}$$

對中點取力矩

重量作用於 M，所以它對 M 沒有力矩。相對於 M，點 A 位於 $(L\sin\beta,\,-L\cos\beta)$，而 B 位於 $(-L\sin\beta,\,L\cos\beta)$。按圖中逆時針方向取力矩（作用於相對位置 (p,q) 的力 (F_x,F_y) 的力矩為 pF_y-qF_x）：

$$\begin{aligned}\text{在}A:&\quad L\sin\beta\cdot R-(-L\cos\beta)(-\mu R)=LR(\sin\beta-\mu\cos\beta),\\ \text{在}B:&\quad -L\sin\beta\cdot\mu S-L\cos\beta\cdot S=-LS(\cos\beta+\mu\sin\beta).\end{aligned}$$

兩者之和必須為零，所以

$$R(\sin\beta-\mu\cos\beta)=S(\cos\beta+\mu\sin\beta).$$

現在代入 $\mu = \tan\gamma$，並把整條式乘以 $\cos\gamma$（它是正數）：

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{即}\quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

想一想 我們可以除以 R 和 $\cos(\beta-\gamma)$ 嗎？

兩個法向反作用力都是推力，所以 $R > 0$ 且 $S > 0$。於是 $\sin(\beta-\gamma)$ 與 $\cos(\beta-\gamma)$ 不可能同時為零；又因為 $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$ 且 $R, S > 0$，兩者同號，所以兩者都不為零，並且 $\tan(\beta-\gamma) > 0$。由於 β 和 γ 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，$\beta-\gamma$ 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 內，因此事實上

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

綜合起來

把 (3) 左邊的分子和分母都除以 R，並記 $k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$ 及 $\mu = \tan\gamma$：

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

這裏用了複角公式（分母 $1+k\mu$ 是正數，所以沒有任何無定義的情況）。由 (4) 及 $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$，

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

而且 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 亦成立。正切函數在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上是一對一（one-to-one）的，所以 $\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$ 迫使

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

得證。這與題目所給的條件 $\alpha < \beta$ 相符；它亦告訴我們，這種狀態只有在 $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$ 時才可能出現。

驗算

- 光滑箱子：當 $\gamma = 0$ 時，結果表示 $\beta = \alpha$。可以直接驗證：沒有摩擦時，兩個法向反作用力相交於 P，即以 AB 為對角線、邊沿箱子方向的長方形的第四個頂點。三個力處於平衡時必須共點（concurrent），所以重量經過 M 的作用線必須經過 P，即 MP 是鉛垂的。對角線 MP 平行於把 OB 向遠離 O 的方向轉過 β 後的方向，而 OB 本身朝 O 的一側與鉛垂成 α 傾斜；所以 MP 與鉛垂成 $\beta-\alpha$，並且恰好在 $\beta = \alpha$ 時是鉛垂的。

- 數值例子：取 $\alpha = 20°$、$\gamma = 15°$，所以 $\beta = 50°$。於是 (1) 和 (2) 給出 $R \approx 0.791W$ 及 $S \approx 0.554W$（兩者皆為正），$S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$，而對 M 的總力矩算出來為零。

常見錯誤

- 沿水平和鉛垂方向分解力：這樣做可行，但四個接觸力每一個都需要分解，代數運算會繁重得多。
- 弄錯摩擦力的方向。摩擦力與即將發生的運動方向相反：在 A 朝向 O，在 B 遠離 O（沿箱側向上）。
- 由 $\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$ 直接下結論，卻沒有說明為何兩個角都位於 tan 為一對一的區間內。

STEP 之外

把摩擦力寫成 μR 並令 $\mu = \tan\gamma$，正是*摩擦角*（angle of friction）的概念：在極限平衡（limiting equilibrium）時，總接觸力位於一個以法線為軸、半頂角為 γ 的「摩擦錐」（friction cone）的邊緣上。關於剛體倚靠粗糙表面的問題，於是變成關於這些錐體以及三力共點的幾何問題；同一幅圖像亦是楔子、梯子以及疊放物體穩定性等問題的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）從基本原理出發，細緻地發展了剛體靜力學和力矩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。