詳細解答

STEP I 2017，第 10 題

力學 • 連鎖碰撞

STEP I 2017，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s1-q10

關鍵思路

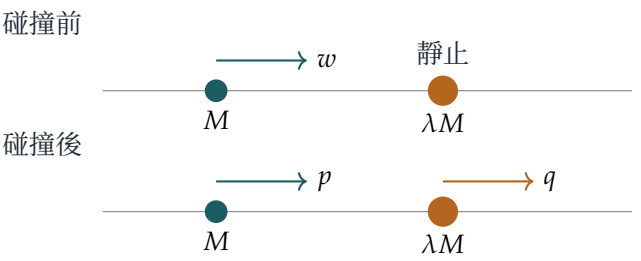
鏈中每一次碰撞的情況都一樣：一粒質量為 M、以速率 w 運動的質點，撞向一粒質量為 λM 的靜止質點。因此我們只需以比值 λ 表示，把這一次碰撞解一遍，整條碰撞鏈便可以重複套用這個結果得出，並得到等比數列（geometric sequence）。之後每一部分的關鍵，就是比較各質點碰撞後的速度，看看有沒有質點追上前面的質點。

解答

把所有質點視為沿 x 軸運動的點，速度以 x 正方向為正。

一次典型的碰撞

質量為 M、以速率 w 運動的質點 A，撞向質量為 λM 的靜止質點 B。設碰撞後兩者的速度分別為 p 和 q。



由動量守恆（conservation of momentum）及牛頓（Newton）碰撞實驗定律（Newton's

experimental law），得

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

把 $p = q - ew$ 代入第一條方程，得 $w = q - ew + \lambda q$，因此

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

記 $r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$ 及 $s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$。留意

$$q - p = ew > 0,$$

所以每次這樣的碰撞剛完結時，兩粒質點都會分開。

第 (i) 部分

第一次碰撞是 P（質量 m，速率 u）撞向 P_1（質量 λm）。取 $w = u$ 及 $M = m$，得

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u,$$

即所求結果，而 P 碰撞後的速度為 su。

接着 P_1 向前運動，撞向質量為 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$ 的 P_2。質量比同樣是 λ，所以這是同一類碰撞，只是 $w = u_1$。一般而言，P_n（質量 $\lambda^n m$）以速率 u_n 撞向 P_{n+1}（質量 $\lambda^{n+1} m$），所以 $u_{n+1} = ru_n$，而 P_n 碰撞後的速度為 su_n。因此

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

這裏 P_n 的第一次碰撞是被 P_{n-1} 撞擊，第二次則是它撞向 P_{n+1}。（第一次碰撞剛完結時，P_n 正遠離 P_{n-1}，所以接下來它會遇上的事，就是到達 P_{n+1}，前提是後面沒有質點先追上它。這正是題目所設想的事件次序，而在第 (ii)–(iv) 部分中，我們會驗證情況確實如此。）所以

$$v_n = su_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u,$$

這是以 x 正方向為正的速度。作為速率，它是上式的絕對值；只有當 $\lambda e > 1$，即 P_n 反彈時，這一點才有影響。

第 (ii) 部分

設 $e > \lambda$。那麼 $\lambda < e < 1$，所以 $\lambda e < 1$ 及 $s > 0$；此外 $r > 1$。

碰撞依次發生：先是 P 與 P_1，然後 P_1 與 P_2，再然後 P_2 與 P_3，如此類推。當 P_n 撞向 P_{n+1} 之後，由隊尾起計，$P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ 的速度為

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

由於 $u_k = r^k u$，其中 $r > 1$ 及 $s > 0$，

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

而且 $u_{n+1} > su_n$，因為 $u_{n+1} - su_n = (r-s)u_n = eu_n > 0$。所以在 $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ 之中，每粒質點都嚴格地比後面那粒快，任何兩粒都不可能再相遇。唯一尚未發生的碰撞，是 P_{n+1} 到達靜止的 P_{n+2}；之後把 n 換成 $n+1$，同樣的論證便再次適用。

所以每粒 P_n（$n \geq 1$）先被 P_{n-1} 撞擊一次，然後撞向 P_{n+1} 一次，此後再不參與任何碰撞：每粒恰好經歷兩次碰撞。（這也證實了第 (i) 部分所假設的事件次序。）

第 (iii) 部分

若 $e = \lambda$，則 $r = 1$ 及 $s = \dfrac{1-e^2}{1+e} = 1 - e$。所以

$$u_n = u \quad \text{且} \quad v_n = (1-e)u \text{ 對每個} n,$$

而 P 碰撞後的速度也是 $(1-e)u$。整個運動就像一個沿直線傳播的脈衝（pulse）：最前面的質點總是以速率 u 運動，撞上下一粒質點時，把速率 u 傳下去，自己則降至 $(1-e)u$。後面所有質點都以 $(1-e)u$ 一起運動，所以它們之間不會再有碰撞，而前面以速率 u 運動的質點則離它們愈來愈遠。每粒 P_n 恰好經歷兩次碰撞。

經過 N 次碰撞後，$P, P_1, \ldots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)u$ 運動，而 P_N（質量 $\lambda^N m = e^N m$）則以 u 運動。動能（kinetic energy）為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2(1+e+\cdots+e^{N-1}) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1-e^N}{1-e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[(1-e)(1-e^N) + e^N] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[1-e+e^{N+1}].\end{aligned}$$

除以初始能量 $\frac{1}{2}mu^2$，經過 N 次碰撞後損失的比例為

$$1 - (1 - e + e^{N+1}) = e(1-e^N) \to e \quad \text{當} N \to \infty,$$

因為 $0 < e < 1$。這就是所求結果。

第 (iv) 部分

若 $\lambda e = 1$，則 $s = 0$ 且

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

所以每次碰撞都令運動中的質點完全停下：P 停下，然後 P_1 以 eu 向前運動，撞向 P_2 後停下，如此類推，其中 $u_n = e^n u$ 及 $v_n = 0$。每粒 P_n 恰好經歷兩次碰撞，最終各質點都靜止，而且每粒都緊貼下一粒，同時只有單獨一粒質點把運動帶向前，而且愈來愈慢。由於 P_n 需要時間 $1/(e^n u)$ 才到達 P_{n+1}，相鄰兩次碰撞之間的時間間隔會無限增大。

想一想 動量守恆，那麼能量又怎會流失？

經過 N 次碰撞後，只有 P_N 在運動，其質量為 $\lambda^N m = e^{-N}m$，速率為 $e^N u$。它的動量是 $e^{-N}m \cdot e^N u = mu$，理應如此；但它的動能是

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

動量由愈來愈重、愈來愈慢的質點承載；在動量 p 固定時，動能 $p^2/(2M)$ 會隨質量 M 增大而趨於零。剩餘的比例 e^N 趨於 0，所以最終初始動能會全部損失。

驗算

- 取 $e = 1$ 及 $\lambda = 1$（質量相等、完全彈性），得 $u_1 = u$ 且 P 停下：這正是大家熟悉的牛頓擺（Newton's cradle）交換速度現象。
- 在第 (iii) 部分中，單次碰撞（$N = 1$）損失的比例為 $e(1-e)$。直接計算：P 最終以 $(1-e)u$ 運動，而質量為 em 的 P_1 則以 u 運動，所以剩餘能量是原來的 $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$，兩者吻合。
- 以精確分數逐步進行碰撞的電腦模擬，證實了 u_n 和 v_n 的公式、$e > \lambda$ 時每粒質點各經歷兩次碰撞的規律、損失比例 $e(1-e^N)$（當 $e = \frac{1}{2}$，經過 25 次碰撞後為 0.49999998），以及 $\lambda e = 1$ 時的剩餘比例 e^N。

常見錯誤

- 把牛頓定律寫成 $q - p = -ew$，或把次序倒轉：分離速率等於接近速率的 e 倍，而這裏兩者都是正數。
- 忘記每一次碰撞的質量比都是 λ，而正是這一點令答案成為等比數列。
- 未經驗證便假設事件的次序。當 $e < \lambda$ 且 $\lambda e < 1$ 時，落在後面的質點可能在前面那粒到達下一粒質點之前就追上它，簡單的規律便不再成立。

STEP 之外

第 (iv) 部分顯示動量和能量的表現截然不同：動量完全守恆，但能量卻因為由愈來愈重的質點承載而完全流失。互相碰撞的質點鏈，是脈衝在密度變化的介質中傳播的一個簡單模型，並可引伸至離散晶格（discrete lattice）中的波動傳播。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就以同樣嚴謹的態度討論碰撞及質心參考系（centre-of-mass frame）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。