詳細解答

STEP I 2017，第 1 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2017，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

關鍵思路

只要把三角函數的分式化簡，這幾個被積函數（integrand）其實都暗藏 $f'(x)/f(x)$ 的形式（最後一題則是 $f'(x)/f(x)^2$）。$x\sin x+\cos x$ 的導數（derivative）特別簡潔，因為兩個 $\sin x$ 項互相抵消，而其餘的代換（substitution）都建基於同樣的抵消。所以策略是：把每個被積函數改寫成以 sin 和 cos（或 sec 和 tan）表示，找出導數與分子（numerator）吻合的分母（denominator），然後代換。

解答

第 (i) 部分

設 $u=x\sin x+\cos x$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

接着把被積函數的分子和分母同乘以 $\cos x$：

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

分子恰好是 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，所以 $x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，從而

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

第二個積分的做法相同，只是以 $\sin x$ 代替 $\cos x$。把分子和分母同乘以 $\sin x$，

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

設 $v = x\cos x - \sin x$，則

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

所以分子是 $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，從而

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

不要漏掉負號：它來自對 $\cos x$ 求導。

第 (ii) 部分

第一個被積函數的分母已經值得一試。設 $w = x\sec^2 x - \tan x$。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

多餘的項再一次互相抵消，而分子是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。因此

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

? **想一想** 最後一個積分裏沒有 sec 或 tan。它怎樣才能與 $w = x\sec^2 x - \tan x$ 拉上關係？

從分母的括號中提取因子 $\cos^2 x$：

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

所以 $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$，而

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

因為 $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$。分子同樣是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，所以用同一個代換，

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x - \sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

其中最後一步是把分子和分母同乘以 $\cos^2 x$。如果你喜歡用倍角（double angles），答案可寫成 $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$。

驗算

- 把每個答案求導，確認能得回被積函數。對最後一題，用商法則（quotient rule）處理 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 時要用到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x) = 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$，而各個 $\sin^2 x\cos^2 x$ 項會整齊地合併。
- 數值計算：在 $[0.3, 1.2]$ 上，第一個積分的值是 $0.34953\ldots$，而 $\ln|x\sin x+\cos x|$ 的改變量相同；最後一個積分在同一區間上的值是 $25.7364\ldots$，與 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 吻合。四個答案都已用電腦這樣核實過。

常見錯誤

- 未先消去 $\tan x$ 或 $\cot x$ 就代換：只有在整式乘以 $\cos x$ 或 $\sin x$ 之後，分子才會與 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 吻合。
- 漏掉第 (i) 部分第二個積分中的負號，或第 (ii) 部分中的因子 $\frac{1}{2}$。
- 在最後一個積分中出於習慣就用對數：$1/w^2$ 的積分是 $-1/w$。

STEP 之外

這裏的技巧是逆向設計：選取代換，使分母的導數在抵消之後恰好等於分子。背後的道理是 $\int f'/f = \ln|f|$，即對數導數（logarithmic derivative）；它在複分析（complex analysis）中再次出現（用來數函數的零點），在微分方程（differential equations）中則以積分因子（integrating factor）的形式出現。不少 STEP 積分題都是先對一個精心挑選的函數求導，再把答案藏起來而設計出來的；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）有大量練習，助你學會識破它們。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。