詳細解答

STEP III 2016，第 9 題

力學 • 彈簧與簡諧運動

> **STEP III 2016，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

關鍵思路

把原點放在三角形的中心，並利用對稱性（symmetry）。平衡位置（equilibrium position）就是中心，在那裏三條相等的張力（tension）互相抵消。當質點沿着直線向 P 移動時，彈簧 QX 和 RX 始終互為鏡像，因此它們的側向拉力互相抵消，運動保持在該直線上。求 RX 需要用到餘弦定律（cosine rule）。至於週期，我們先寫出準確的恢復力（restoring force），然後只保留對小位移為線性的項。

解答

我們把 X 視為光滑桌面上的質點，把彈簧視為遵守虎克定律（Hooke's law）的輕彈簧，因此長度為 r 的彈簧的張力為 $\frac{\lambda}{l}(r-l)$。

平衡

設 O 為三角形的中心。每個頂點與 O 的距離為

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{高}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

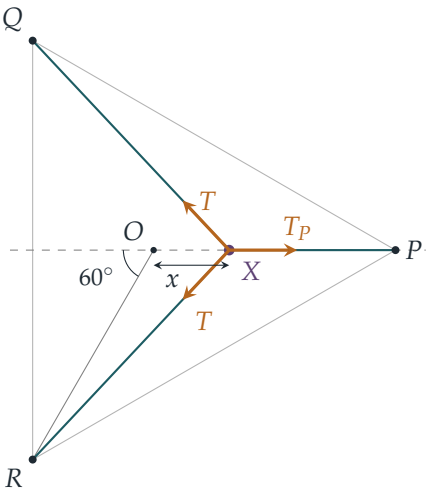
而直線 OP、OQ、OR 兩兩之間的夾角為 120°。當 X 在 O 時，每條彈簧的長度都是 c，所以三條張力相等。三個大小相等、兩兩夾角為 120° 的力的合力為零，所以 O 是一個平衡位置。我們使用的正是這個平衡位置。由於 $l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$，每條彈簧都被拉伸，伸長量（extension）為

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\, a - l,$$

得證。

RX 中的張力

取 x 軸沿 OP，以 P 的方向為正方向。設 X 在由 O 向 P 方向位移 x 之處。那麼 $OX = x$、$OR = c$，而 $\angle XOR = 180° - 60° = 120°$。



在三角形 XOR 中應用餘弦定律，

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

因此由虎克定律，RX 中的張力為

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

得證。由關於軸 OP 的對稱性，$QX = RX$，所以 QX 的張力同樣是 T。

運動方程

記 $r = RX$。彈簧 PX 的長度為 $c - x$，所以它的張力為 $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$，方向指向 P（即 $+x$ 方向）。

點 R 的 x 坐標為 $-c\cos 60° = -\frac{c}{2}$，所以由 X 到 R 的位移的 x 分量為 $-\left(x + \frac{c}{2}\right)$。因此沿 XR 的力 T 的 x 分量為 $-T\,\dfrac{x + c/2}{r}$。來自 QX 的力有相同的 x 分量，而兩個垂直分量由對稱性互相抵消。所以沒有橫越直線 OP 的力，X 沿該直線運動。

? **想一想** 怎樣從這個平方根得出一條線性方程？

先寫出準確的力，再對小 x 作展開。沿 OP 分解，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_P - 2T\,\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right]. \end{aligned}$$

這條方程是準確的。現在 $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$。利用二項式展開（binomial expansion），並捨去 x^2 及更高次的項，

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

代入，

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

由於 $\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}l}{4a}$，

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}\,l)}{4mla}.$$

由於 $\sqrt{3}\,l < 2a < 4a$，這個 ω^2 是正數。所以這個力是恢復力，而對於小 x，質點繞 O 作近似的簡諧運動（simple harmonic motion），週期為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}\,l)\lambda}},$$

得證。

驗算

- 當 $x = 0$ 時，準確的力為 $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right] = 0$，與最初求得的平衡位置一致。
- 單位：λ 是力，l、a 是長度，所以 $\frac{mla}{a\lambda}$ 的單位為 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$，而週期是時間。
- 求 ω^2 的另一途徑。對於小位移，一條彈簧因拉伸而貢獻勁度（stiffness）$\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$，因轉向而貢獻 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$，其中 ϕ 是彈簧與 OP 的夾角，$T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$ 是平衡時的張力。取 $\phi = 0°, 60°, 60°$，總勁度為 $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l}+\frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$，與之前相同。
- 取 $a = \lambda = m = 1$ 及 $l = 0.8$，公式給出的週期約為 2.838。以電腦模擬完整的二維運動，從向 P 方向的小位移開始，得出的數值在四位有效數字內相同。

常見錯誤

- 用了 $\cos 120° = +\frac{1}{2}$，或在餘弦定律中用錯角。這會在平方根內得出 $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$。

- 把 QX 和 RX 中的張力當作常數。它們方向的改變和大小的改變都會貢獻對 x 為線性的項。
- 求中心到頂點的距離時，把三角形的邊長寫成 a 而不是 $2a$。

STEP 之外

在任何穩定平衡位置附近，力對位移都近似為線性。這裏的恢復力是彈性勢能的梯度（gradient），而 $m\omega^2$ 是它的二階導數（second derivative）。在二維情況下，這個二階導數變成一個 2×2 矩陣（黑森矩陣（Hessian）），而它的特徵向量（eigenvector）就是小振動的簡正模（normal modes）。由於三重對稱性，這個系統繞 O 在每個方向的振動週期都相同，而不只是沿 OP 的方向。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）講述了小振動和耦合系統。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。