詳細解答

STEP III 2016，第 8 題

純數學 • 函數方程

> **STEP III 2016，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

關鍵思路

每條方程都把未知函數在 x 的值，與它在某個經變換後的點的值聯繫起來。如果再施行一次（或第三次）該變換就會回到 x，那麼把變換後的點代入方程，便會得到同一組未知量的第二條方程。這樣你便有了聯立線性方程（simultaneous linear equations），可以像處理普通未知數一樣，消去不需要的值。

解答

第 (i) 部分

方程對所有 x 都成立，因此把 x 換成 $-x$ 後仍然成立：

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

這正是所求的結果。

現在我們有兩條方程，含兩個未知量 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{f}(-x)$。由第二條得 $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$，代入原方程，得

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + (1-x)(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)) &= x^2 \\ \mathrm{f}(x)(1 - (1-x^2)) &= x^2 - (1-x)x^2 \\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3. \end{aligned}$$

當 $x \neq 0$ 時，可以除以 x^2，得 $\mathrm{f}(x) = x$。當 $x = 0$ 時，原方程變為 $\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(0) = 0$，所以同樣有 $\mathrm{f}(0) = 0$。因此

$$\mathrm{f}(x) = x \quad \text{對所有} x.$$

驗證：$x+(1-x)(-x)=x-x+x^2=x^2$，符合要求。

想一想 為甚麼題目堅持要我們驗證答案？

我們的論證只說明了：如果有函數滿足該方程，它必定是 $f(x)=x$。它並沒有說明這樣的函數存在：運算過程中可能丟失了資訊，那樣的話便沒有任何函數可行。代回原方程便填補了這個缺口。

第 (ii) 部分

首先注意，對每個 $x\neq 1$ 都有 $\mathrm{K}(x)\neq 1$，因為 $\frac{x+1}{x-1}=1$ 需要 $x+1=x-1$。所以 $\mathrm{K}(\mathrm{K}(x))$ 有定義；把分子分母同乘以 $x-1$，

$$\mathrm{K}(\mathrm{K}(x))=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$

g 的方程是 $\mathrm{g}(x)+x\,\mathrm{g}(\mathrm{K}(x))=x$。由於 $\mathrm{K}(x)\neq 1$，我們可以把 x 換成 $\mathrm{K}(x)$；又因 $\mathrm{K}(\mathrm{K}(x))=x$，得

$$\mathrm{g}(\mathrm{K}(x))+\mathrm{K}(x)\,\mathrm{g}(x)=\mathrm{K}(x).$$

以 K 表示 $\mathrm{K}(x)$。於是 $\mathrm{g}(K)=K-K\,\mathrm{g}(x)$，代入原方程，

$$\mathrm{g}(x)+x(K-K\,\mathrm{g}(x))=x \quad\Longrightarrow\quad (1-xK)\,\mathrm{g}(x)=x-xK.$$

而

$$1-xK=\frac{(x-1)-x(x+1)}{x-1}=-\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x-xK=x\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{x-1}=-\frac{2x}{x-1}.$$

由於 $x^2+1>0$，因子 $1-xK$ 永不為零，所以可以相除：

$$\mathrm{g}(x)=\frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)}=\frac{2x}{x^2+1}\qquad (x\neq 1),$$

符合所求。（可以驗證這個函數確實滿足方程；例如在 $x=2$ 時，$\mathrm{K}(2)=3$，而 $\frac{4}{5}+2\cdot\frac{6}{10}=2$。）

第 (iii) 部分

設 $\mathrm{M}(x)=\dfrac{1}{1-x}$。方程為

$$\mathrm{h}(x)+\mathrm{h}(\mathrm{M}(x))=1-x-\mathrm{M}(x),$$

而右方只用 x 和 $\mathrm{M}(x)$ 表示，這是個好兆頭。

這次 M 不是自身的逆（inverse），所以要看重複施行的結果。對 $x \neq 0, 1$：

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

所以 M 的週期（period）為三。我們還需要 M 讓我們留在定義域（domain）之內：$\mathrm{M}(x)$ 永不為 0，而 $\mathrm{M}(x) = 1$ 只在 $x = 0$ 時發生，因此若 $x \neq 0, 1$，則 $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$ 亦成立。

想一想 施行兩次 M 不會回到 x。我們怎樣才能得到足夠的方程？

利用循環中的全部三個點。記 $a = x$，$b = \mathrm{M}(x)$，$c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$，於是 $\mathrm{M}(c) = a$。依次在 a、b、c 應用方程：

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

三式相加再除以二，

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

減去第二條方程，得

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

因此

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

驗證：$(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$，符合要求。

驗算

- 在 (i) 中，試 $x = 3$：$3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$。
- 在 (ii) 中，試 $x = -1$：$\mathrm{K}(-1) = 0$，而 $\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$。此外 $\mathrm{K}(0) = -1$，證實了週期為二。
- 在 (iii) 中，試 $x = 2$：循環為 $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$，而 $\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$，同時 $1 - 2 - (-1) = 0$。

三個函數亦已經由電腦以精確算術，在兩千個隨機有理數值上逐一檢驗每條方程，全部確認無誤。

常見錯誤

- 在 (i) 中除以 x^2 時忘記了 $x = 0$，這情況需要另作（只需一行的）論證。
- 把 $\mathrm{K}(x)$ 或 $\mathrm{M}(x)$ 代入 x 時，沒有檢查它是否仍在方程成立的定義域之內。
- 在 (iii) 中只代入一次，結果卡在三個未知量上：你需要整個循環。

STEP 之外

映射 $x \mapsto -x$、K 和 M 都是莫比烏斯變換（Möbius transformations）$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$，它們在複合（composition）運算下構成一個羣（group）。有限階（finite order）的變換生成一個有限循環羣（cyclic group），而這裏的方法就是對該羣求和（或消元），這個想法在羣表示論（group representation theory）中會再次出現。莫比烏斯映射與 2×2 矩陣相對應，你可以透過把一個矩陣自乘三次，得出 $\mathrm{M}^3 = $ 恆等變換。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對莫比烏斯變換有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。