詳細解答

STEP III 2016，第 7 題

純數學 • 單位根

> **STEP III 2016，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 5.4 節正多邊形中的距離中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/polygon-distances.html

關鍵思路

距離就是模（modulus），而模的乘積等於乘積的模。若把正多邊形放在阿岡圖（Argand diagram）上，使其頂點為經旋轉的 n 次單位根（roots of unity），那麼根據開首的恆等式，距離的乘積就變成某個適當的 w 所對應的 $|w^n - 1|$。唯一真正要花心思的，是選好坐標：把 O 放在原點，並令 X_0X_1 的垂直平分線（perpendicular bisector）為實軸，這樣 P 就是一個實數。

解答

因式分解

對 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，我們有 $(\omega^k)^n = \mathrm{e}^{2\pi i k} = 1$，因此每個 ω^k 都是 $z^n - 1$ 的根。這 n 個數互不相同，因為它們的輻角（argument）$2\pi k/n$ 是 $[0, 2\pi)$ 中互不相同的數。恆等式兩邊都是 n 次的首一多項式（monic polynomial），所以它們的差

$$D(z) = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}) - (z^n - 1)$$

的次數（degree）至多為 $n-1$。但 D 在 n 個不同的點 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ 處取值為零，而次數至多為 $n-1$ 的非零多項式最多只有 $n-1$ 個根。因此 $D \equiv 0$，即

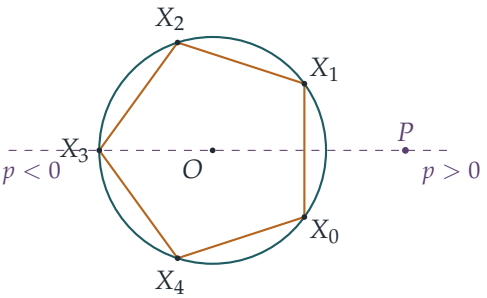
$$\prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k) = z^n - 1 \quad \text{對所有複數} z.$$

第 (i) 部分

我們假設頂點沿圓周依次標記，因此 X_0 與 X_1 相鄰，且 $\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$。旋轉或反射圖形都不會改變任何距離，所以可以把 O 放在原點，並令

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

於是 $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$ 與 $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ 互為關於實軸的反射，所以 X_0X_1 的垂直平分線就是實軸。與 X_0 和 X_1 等距的點恰好就是這條直線上的點，所以 P 是一個實數 p，且 $|OP| = |p|$。X_0X_1 的中點是 $\cos(\pi/n) > 0$，因此 $p > 0$ 表示 P 與邊 X_0X_1 位於 O 的同一側。



（圖中所示為 $n = 5$；當 n 為奇數時，通過 O 的這條直線亦會經過對面的頂點。）

現在，利用 $|ab| = |a||b|$ 及 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$，

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k\right)\right| = \left|\left(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}\right)^n - 1\right|,\end{aligned}$$

這裏用了因式分解（factorisation），並取 $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$。由於 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$，

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

? **想一想** 為甚麼 p 的正負號對奇數 n 有影響，對偶數 n 卻沒有影響？

若 n 為偶數，則無論 p 的正負號如何，都有 $p^n = |p|^n \geq 0$，所以 $|p^n + 1| = |p|^n + 1$，從而

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

這正是所求的結果。若 n 為奇數，則 p^n 與 p 同號，需分兩種情況。

- 若 P 位於由 O 出發、經過 X_0X_1 中點的射線（ray）上（$p \geq 0$），則 $p^n = |OP|^n$，乘積為 $|OP|^n + 1$。

- 若 P 位於相反方向的射線上（$p < 0$），對奇數 n 而言，這是由 O 出發、經過頂點 $X_{(n+1)/2}$（位於 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$）的射線，則 $p^n = -|OP|^n$，乘積為

$$\big|\,|OP|^n - 1\big|.$$

在第二種情況中，模的符號是不可或缺的：當 P 在圓內時，其值為 $1 - |OP|^n$；當 $P = X_{(n+1)/2}$ 時，其值為 0，這是理所當然的，因為此時其中一段距離為零。

第 (ii) 部分

這次旋轉圖形，使 $X_k = \omega^k$，因此 $X_0 = 1$。對 $z \neq 1$，因式分解給出

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

兩端都是多項式，而且在無限多個點（每個 $z \neq 1$）上取值相同，所以它們對所有 z 都相等，包括 $z = 1$。代入 $z = 1$：

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

取模，並利用 $|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$，

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

這正是所求的結果。

驗算

- 正方形（$n = 4$），取 $P = O$：每段距離都是 1，所以乘積為 $1 = 0^4 + 1$。當 P 很遠時，乘積的表現與 $|OP|^n$ 相若，與公式相符。
- 等邊三角形（$n = 3$），P 在遠側且與 O 相距 2：各距離為 1（到位於 -1 的對面頂點）及兩次 $\sqrt{(-2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$，得出 $7 = 2^3 - 1$。
- 正方形的第 (ii) 部分：$|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$。三個結果亦已用電腦就隨機的 n、旋轉及 P 的位置加以驗證。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 X_0 放在 1：這樣 X_0X_1 的垂直平分線便是傾角為 π/n 的直線，而不是實軸，代數運算會更繁複。應按 P 的位置來選取坐標。
- 在奇數情況且 P 在遠側時忘記取模：當 P 在圓內時，$|OP|^n - 1$ 是負數。
- 直接把 $z = 1$ 代入 $\dfrac{z^n - 1}{z - 1}$；能夠證明其值為 n 的，是那條多項式恆等式。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是說 $z^n - 1$ 在 $z = 1$ 處的導數（derivative）為 n：一般而言，若 $f(z) = \prod(z - a_k)$，則 $f'(a_0) = \prod_{k \neq 0}(a_0 - a_k)$。這類對單位根所取的乘積，出現於分圓多項式（cyclotomic polynomials）的理論及判別式（discriminant）的計算之中；而第 (i) 部分本質上是羅傑·科茨（Roger Cotes）的一個經典結果，涉及正多邊形對稱軸上一點到各頂點的距離。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是欣賞複數乘法這種幾何意義如何發展的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。