詳細解答

STEP III 2016，第 6 題

純數學 • 雙曲函數

STEP III 2016，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q6

關鍵思路

把 $\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$ 兩邊乘以 $\cosh x$，得 $a\sinh x + b\cosh x = 1$，這正是開首部分所處理的組合。因此第一步就是把大家熟悉的「$R\cos(x+\alpha)$」技巧搬到雙曲函數（hyperbolic functions）上。與三角函數的情況不同，所得的形式取決於 B 與 $\pm A$ 的大小關係，而每種形式都能讓你立即看出解的個數。

解答

$A\sinh x + B\cosh x$ 的各種形式

展開，

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

所以我們需要 $R\sinh\gamma = A$ 及 $R\cosh\gamma = B$。由於 $\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$，這就迫使 $R^2 = B^2 - A^2$ 及 $\tanh\gamma = A/B$。當 $B > A > 0$ 時，兩者都可以滿足：取

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

由於 $0 < A/B < 1$，γ 是存在的。於是 $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$，且 $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$，所以 $R\cosh\gamma = B$ 及 $R\sinh\gamma = A$，符合要求。因此 $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$。

其他情況（設 $A > 0$）：

- $-A < B < A$：改為比較 $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$ 的係數，得

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$：$A(\sinh x + \cosh x) = A\mathrm{e}^{x}$。
- $B = -A$：$A(\sinh x - \cosh x) = -A\mathrm{e}^{-x}$。
- $B < -A$：把第一個結果應用於 $-A\sinh x - B\cosh x$（此時 $-B > A$ 而 $-A < 0$；上面的推導其實只需要 $|A| < B$），得

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x + \gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

交點方程

由於 $\cosh x > 0$，兩曲線相交於

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \tag{$*$}$$

第 (i) 部分

當 $b > a > 0$ 時，記 $R = \sqrt{b^2 - a^2}$；於是 $(*)$ 變成

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

若兩曲線相交，則此方程有解，所以右方至少為 1。當 $c \geq 1$ 時，$\cosh u = c$ 的解為 $u = \pm\operatorname{arcosh} c$，所以

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

這正是所要求的形式。

第 (ii) 部分

當 $a > b > 0$ 時，屬於 sinh 的情況：$(*)$ 變成 $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$。由於 sinh 是從 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），兩曲線必定恰有一個交點，位於

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

第 (iii) 部分

按開首部分的每種情況（取 $A = a > 0$，$B = b$）數算 $(*)$ 的解：

- $b < -a$：左方 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x + \gamma)$ 是負數，所以無解。
- $b = -a$：$-a\mathrm{e}^{-x} = 1$ 無解。
- $-a < b < a$：恰有一個解，與 (ii) 相同；那裏的論證對此範圍內任何 b 都成立。

- $b = a$：$ae^x = 1$ 只有一個解 $x = -\ln a$。
- $b > a$：若 $1/\sqrt{b^2 - a^2} > 1$，則 $\cosh(x + \gamma) = 1/\sqrt{b^2 - a^2}$ 有兩個解；若等於 1，則有一個解；若小於 1，則無解。

? **想一想** 為甚麼 $b \le a$ 的情況永遠不可能給出兩個交點？

在這些情況下，$(*)$ 的左方要麼是 x 的嚴格單調（strictly monotonic）函數（$\sinh(x+\gamma)$ 或 $e^{\pm x}$ 的倍數），要麼恆為負數，所以它最多只取值 1 一次。只有先下降再上升的 cosh 形式才能兩次達到 1。

所以兩曲線相交於兩個不同點，當且僅當 $b > a$ 且 $b^2 - a^2 < 1$，即

$$a < b < \sqrt{a^2 + 1}.$$

第 (iv) 部分

由於 $\operatorname{sech} x - (a\tanh x + b) = \operatorname{sech} x\,(1 - a\sinh x - b\cosh x)$ 且 $\operatorname{sech} x \neq 0$，兩曲線相切（touch）恰好發生在 $g(x) = a\sinh x + b\cosh x - 1$ 有重根（repeated zero）之處，即 $g(x) = g'(x) = 0$。在 sinh 及指數的情況下，$g'(x)$ 是 $\cosh(x+\gamma)$ 或 e^x 的倍數，永不為零，所以沒有重根。在 $b > a$ 的情況下，$g(x) = R\cosh(x+\gamma) - 1$ 而 $g'(x) = R\sinh(x+\gamma)$，兩者只在 $x + \gamma = 0$ 且 $R = 1$ 時同時為零。因此兩曲線相切，當且僅當

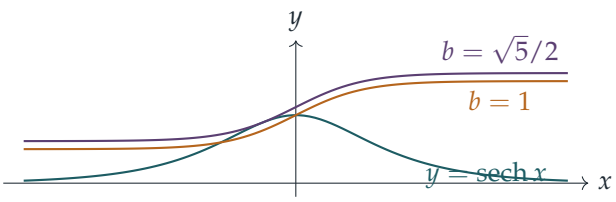
$$b > a \quad \text{且} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{即} \quad b = \sqrt{1 + a^2}.$$

切點的 $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$，所以

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

這裏用了 $\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$ 及 $\operatorname{sech} u > 0$。作為驗證，另一條曲線同樣給出 $y = -a \cdot \frac{a}{b} + b = \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{1}{b}$。

下圖顯示 $a = \frac{1}{2}$ 的情況：當 $b = 1$（琥珀色）時有兩個交點；當 $b = \sqrt{5}/2$（梅紅色）時，兩曲線在高度 $2/\sqrt{5}$ 處相切。



驗算

取 $a=\frac{3}{4}$，$b=1$，則 $b^2-a^2=\frac{7}{16}<1$，按 (iii) 應有兩個交點。此時 $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7})=\ln\bigl((4+3)/\sqrt{7}\bigr)=\ln\sqrt{7}$，而 $\operatorname{artanh}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{7}$，所以 (i) 的公式給出 $x=0$ 及 $x=-\ln 7\approx -1.946$。在 $x=0$ 處，兩曲線都經過 $(0,1)$，與預期相符。另外，以電腦對大量隨機的 a 和 b 檢驗 $(*)$，亦確認了每種情況下根的個數，以及相切條件確實給出重根。

常見錯誤

- 忘記邊界情況 $b=\pm a$：此時 cosh 和 sinh 形式都不存在，但該式化為單一個指數函數。
- 在 (iii) 中只寫出 $b^2-a^2<1$ 而漏掉 $b>a$：當 $b<a$ 時兩曲線仍然相交，但只有一個交點。
- 弄錯 γ 的正負號：解是 $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$ 減去 $\operatorname{artanh}(a/b)$。

STEP 之外

情況的劃分由 B^2-A^2 的正負決定：點 (A,B) 位於由直線 $B=\pm A$ 所分隔的某個區域之內，或位於這些直線上。這正是狹義相對論（special relativity）的幾何：勞侖茲推動（Lorentz boost）是保持 t^2-x^2 不變的雙曲「旋轉」，正如普通旋轉保持 x^2+y^2 不變；而 $B=\pm A$ 擔當光錐（light cone）的角色——那是推動永遠無法令你越過的唯一邊界。想看更多雙曲函數及這類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。