詳細解答

STEP III 2016，第 5 題

純數學 • 質數的乘積

> **STEP III 2016，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 1.2 節質數分佈得有多稀疏？中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/prime-distribution.html

關鍵思路

中間的二項式係數（binomial coefficient）$\binom{2m+1}{m}$ 並不大（它和它的「孿生」項 $\binom{2m+1}{m+1}$ 與其他各項共同分享總和 2^{2m+1}），但它可被 $m+1$ 與 $2m+1$ 之間的每一個質數（prime）整除。因此這些質數的乘積也不大。把不超過 $2m+1$ 的質數分成「不超過 $m+1$」和「大於 $m+1$」兩組，便可以建立一個強歸納法（strong induction）；而偶數完全不會帶來額外麻煩，因為它們（除了 2 以外）都不是質數。

解答

第 (i) 部分

在 $(1+x)^{2m+1}$ 的二項展開式（binomial expansion）中代入 $x=1$：

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}=2^{2m+1}.$$

左邊每一項都是正數。由對稱性，$\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$，而這是和式中兩個不同的項。由於 $m\geq 1$，項 $\binom{2m+1}{0}=1$ 是第三個不同的項。因此

$$2\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}<2^{2m+1},$$

所以 $\binom{2m+1}{m}<2^{2m}$，得證。

第 (ii) 部分

寫成

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}, \qquad \text{所以} \qquad m!\,(m+1)!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!.$$

設 p 為滿足 $m+1 < p \leq 2m+1$ 的質數。那麼 p 是 $(2m+1)!$ 的其中一個因數，所以 p 整除右邊。但 $m!\,(m+1)!$ 的每個因數都不超過 $m+1 < p$，所以質數 p 不整除其中任何一個，因此 $p \nmid m!\,(m+1)!$。若一個質數整除乘積 ab，它必定整除 a 或 b，所以 $p \mid \binom{2m+1}{m}$。

想一想 每個這樣的質數都整除該係數。為甚麼它們的乘積也整除它？

這些質數互不相同，所以它們兩兩互質（pairwise coprime），而一個能被若干個兩兩互質的數整除的數，必能被它們的乘積整除。（等價地，由唯一分解定理（unique factorisation），這些質數每一個都出現在 $\binom{2m+1}{m}$ 的質因數分解中。）所以 $P_{m+1,2m+1}$ 整除 $\binom{2m+1}{m}$。若不存在這樣的質數，則 $P_{m+1,2m+1} = 1$，它整除一切整數。

正整數的正因數不會大於該數本身，所以由第 (i) 部分，

$$P_{m+1,2m+1} \leq \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}.$$

第 (iii) 部分

由於 $m \geq 1$，我們有 $1 < m+1 < 2m+1$。每個質數 $p \leq 2m+1$ 要麼滿足 $p \leq m+1$，要麼滿足 $m+1 < p \leq 2m+1$，但不會兩者同時成立，所以

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1}\,P_{m+1,2m+1}.$$

此外 $2 \leq m+1 \leq 2m$（因為 $m \geq 1$），所以 $k = m+1$ 是假設所涵蓋的值之一，從而得到 $P_{1,m+1} < 4^{m+1}$。結合第 (ii) 部分，

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \cdot 2^{2m} = 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

第 (iv) 部分

我們對 n 使用強歸納法。設 $S(n)$ 為命題 $P_{1,n} < 4^n$。

基本情況。 $P_{1,2} = 2 < 16 = 4^2$。

歸納步驟。設 $n \geq 3$，並假設 $S(k)$ 對 $k = 2, 3, \ldots, n-1$ 均成立。

- 若 n 是奇數，寫成 $n = 2m+1$，其中 $m \geq 1$。那麼 $n-1 = 2m$，所以 $S(k)$ 對 $k = 2, \ldots, 2m$ 成立。由第 (iii) 部分得 $P_{1,2m+1} < 4^{2m+1}$，這正是 $S(n)$。

- 若 n 是偶數，則 $n \geq 4$ 是大於 2 的偶數，所以它不是質數。因此不超過 n 的質數恰好就是不超過 $n-1$ 的質數，於是

$$P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n.$$

想一想 為甚麼我們不能對每個 n 都直接使用第 (iii) 部分？

第 (iii) 部分只處理奇數 $2m+1$。對於偶數 n，我們需要另一個論證；而上面的論證很簡單，因為大於 2 的偶數不會為乘積添加新的質數。

所以 $S(n)$ 在兩種情況下都成立，由強歸納法，$P_{1,n} < 4^n$ 對所有 $n \geq 2$ 成立。

驗算

- $m = 3$：$\binom{7}{3} = 35 < 64 = 2^6$。在 $(4, 7]$ 中的質數是 5 和 7，而 $P_{4,7} = 35$ 恰好整除 35。
- $m = 5$：$\binom{11}{5} = 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$，它可被 $P_{6,11} = 77$ 整除。此外 $462 < 1024$。
- $P_{1,10} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$，遠小於 $4^{10} = 1\,048\,576$。電腦驗證確認 $P_{1,n} < 4^n$ 對 2 至 1500 的每個 n 都成立。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 $<$ 寫成 $\leq$：要得到嚴格不等式，除了兩個中間項之外，還需要第三個正項，例如 $\binom{2m+1}{0}$。
- 在第 (iii) 部分，忘記檢查 $m+1$ 是否位於假設適用的範圍 $2, \ldots, 2m$ 之內。
- 在第 (iv) 部分，只處理奇數 n，或者忘記基本情況 $n = 2$。

STEP 之外

這是艾狄胥（Erdős）對上界 $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ 的初等證明。取對數後，它說明切比雪夫（Chebyshev）函數 $\theta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p$ 小於 $n \ln 4$。這是切比雪夫定理的其中一半；該定理指出不超過 n 的質數個數的數量級為 $n / \ln n$。艾狄胥用同類的二項式係數論證證明了伯特蘭公設（Bertrand's postulate）：在 n 與 $2n$ 之間必定存在一個質數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步學習初等數論的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。