詳細解答

# STEP III 2016，第 4 題

純數學 • 裂項相消級數

**STEP III 2016，第 4 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q4

## 關鍵思路

題目建議的兩個分數之差，原來是通項（general term）的常數倍，因此這個和會伸縮相消（telescoping）：幾乎所有項都互相抵消，只剩下首尾兩部分。第 (ii) 部分中，把 sech 用指數函數表示並提出一個因子後，每一項看起來就與第 (i) 部分取 $x = \mathrm{e}^{-2y}$ 時的項完全一樣。由於 sech 是偶函數（even function），雙向無限和便可以摺回單向的和。

## 解答

### 第 (i) 部分

把建議的差化為公分母（common denominator），

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

由於 $|x| \neq 1$，故 $x \neq 1$，所以可以除以 $x-1$。（這個條件亦保證 $x \neq -1$，因此沒有分母 $1+x^r$ 會等於零：若 $x^r = -1$，則必有 $|x| = 1$。）因此

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

由 $r = 1$ 加到 $N$，每個括號中的第二個分數都與下一個括號的第一個分數抵消，剩下

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} &= \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)\\ &= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},\end{aligned}$$

其中第二個形式是把兩個分數合併而得：分子為 $x^{N+1} - x = x(x^N - 1)$。

現設 $|x|<1$。當 $N\to\infty$ 時 $x^{N+1}\to 0$，因此部分和（partial sums）趨向

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x}-1\right)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{-x}{1+x}=\frac{x}{1-x^2},$$

這正是所求的無窮級數之和。

### 第 (ii) 部分

對任何實數 $t$，

$$\operatorname{sech} t=\frac{2}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}=\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}.$$

設 $x=\mathrm{e}^{-2y}$；由於 $y>0$，故 $0<x<1$。於是 $\operatorname{sech}(ry)=2\mathrm{e}^{-ry}/(1+x^r)$，而

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=\frac{4\,\mathrm{e}^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}=4\mathrm{e}^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

因為 $\mathrm{e}^{-2ry}=x^r$。

> **想一想** 為甚麼要把 $\mathrm{e}^{-(2r+1)y}$ 拆成 $\mathrm{e}^{-y}\cdot\mathrm{e}^{-2ry}$？

我們希望分子是 $x^r$，即分母中出現的同一個 $x$ 的冪，這樣第 (i) 部分便可以逐項套用；剩下的因子 $\mathrm{e}^{-y}$ 與 $r$ 無關，可以提到和號之外。

由於 $|x|<1$，由第 (i) 部分得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=4\mathrm{e}^{-y}\,\frac{x}{1-x^2}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{x^{-1}-x}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2y}}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{2\sinh 2y},$$

即 $2\mathrm{e}^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$，與題目所求相同。把這個和記作 $S$。

### 雙向無限和

把對所有整數 $r$ 求的和分成三部分：$r\ge 1$、$r\in\{-1,0\}$ 及 $r\le -2$。

> **想一想** $r$ 為負數的項是怎樣的？

對 $r\le -2$，設 $s=-r-1$，則 $s\ge 1$，且 $r+1=-s$、$r=-(s+1)$。由於 sech 是偶函數，

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=\operatorname{sech}((s+1)y)\operatorname{sech}(sy),$$

而當 $r$ 取遍 $-2,-3,\ldots$ 時，$s$ 取遍 $1,2,\ldots$。所以 $r\le -2$ 的各項之和亦為 $S$。（兩個單向的和都收斂（converge），因此這樣拆分雙向無限和是合理的。）

中間的兩項為

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0=\operatorname{sech}y,\qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\operatorname{sech}y=\operatorname{sech}y.$$

因此，利用 $\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$，

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = 2S + 2\operatorname{sech} y = \frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y} + \frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$= \frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

但 $\mathrm{e}^{-y} + \sinh y = \mathrm{e}^{-y} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}) = \cosh y$，所以 $\cosh y$ 互相抵消，得

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \frac{2}{\sinh y} = 2\operatorname{cosech} y.$$

## 驗算

- 取 $N = 1$，有限和公式給出 $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)} = \dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$，正是 $r = 1$ 的單一項。
- 取 $x = \frac{1}{2}$：無窮級數之和應為 $\frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$，而部分和確實趨近 0.6667。
- 取 $y = 1$：$2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech} 2 \approx 0.202864$，$2\operatorname{cosech} 1 \approx 1.701836$，兩者都與直接對級數求和的結果在多個小數位上吻合（已用電腦對多個 $y$ 值驗證）。
- 當 $y \to \infty$ 時，只有 $r = -1, 0$ 兩項不會消失，每項約為 $2\mathrm{e}^{-y}$，合共約 $4\mathrm{e}^{-y}$；而 $2\operatorname{cosech} y \approx 4\mathrm{e}^{-y}$，亦相符。

## 常見錯誤

- 忘記因子 $\frac{1}{x-1}$，或弄錯其正負號：該差等於項的 $(x-1)$ 倍，而不是 $(1-x)$ 倍。
- 在雙向無限和中，只把 $S$ 乘以二，卻忘記 $r = -1$ 及 $r = 0$ 兩項；這兩項涉及 $\operatorname{sech} 0 = 1$，並不屬於任何一個單向的和。

## STEP 之外

在這裏重排及拆分無窮級數是安全的，因為每一項都是正數（級數絕對收斂（converges absolutely））；對於條件收斂（conditionally convergent）的級數，黎曼（Riemann）重排定理（rearrangement theorem）指出，重新排列各項可以令和變成任何你想要的數值——這是大學第一個分析（analysis）課程中會遇到的驚人結果。像 $\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$ 這類乘積對所有整數求和，亦會在橢圓函數（elliptic functions）理論中出現，而這類雙邊級數（bilateral series）往往有優美的閉合形式。關於級數的分析，可參閱 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。