詳細解答

STEP III 2016，第 3 題

純數學 • 積分與多項式

STEP III 2016，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 4.6 節沒有公式的積分中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/no-formula.html

關鍵思路

形如 $\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{常數}$ 的等式，其實只是一個關於導數(derivative)的陳述，所以把右邊求導，再消去分母即可。這樣問題便化為一個多項式恆等式（polynomial identity），而多項式恆等式有兩種處理方法：代入一個精心挑選的值（這裏是 $x=-1$），以及比較次數（degree）。

解答

以下把 $P(x)$、$Q(x)$ 簡寫為 P、Q。由商法則（quotient rule）和積法則（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

因此，積分等式成立當且僅當此式等於被積函數（integrand）（其中 Q 不是零多項式）。

第 (i) 部分

令導數等於 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$，約去 $\mathrm{e}^x \neq 0$ 並去分母，得多項式恆等式

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = \left(x^3-2\right)Q^2. \qquad (*)$$

Q 有因式 $x+1$。在 $(*)$ 中代入 $x=-1$。左邊為 0，右邊為 $-3\,Q(-1)^2$。因此 $Q(-1) = 0$，由因式定理（factor theorem）知 $x+1$ 整除 Q。

次數。P 不是零多項式，否則導數會是 0，而不是被積函數。設 $\deg P = p$、$\deg Q = q$，首項係數（leading coefficient）分別為 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$。在 $PQ + P'Q - PQ'$ 中，PQ 一項的次數為 $p+q$，首項係數為 ab；而 $P'Q$ 和 PQ' 的次數各自至多為 $p+q-1$。所以 $PQ + P'Q - PQ'$ 的次數恰好是 $p+q$，而 $(*)$ 左邊的次數是 $p+q+2$。右邊的次數是 $3+2q$。因此

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

即 P 的次數恰好比 Q 的次數多一。

$Q = x+1$ 的情況。此時 P 的次數為 2，設 $P = ax^2 + bx + c$。由於 $Q = x+1$、$Q' = 1$，$(*)$ 變為

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

約去 $(x+1)^2$ 得

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

由於 $xP = ax^3 + bx^2 + cx$，而 $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$，

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

比較係數：$a = 1$；由常數項得 $b = -2$；於是 x^2 項的條件 $2a+b = 0$ 亦相符；而由 x 項得 $c = -(2a+b) = 0$。因此

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{常數}.$$

第 (ii) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設存在這樣的 P 和 Q，且兩者沒有公因式。和之前一樣，求導並去分母，得

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

代入 $x = -1$ 得 $Q(-1)^2 = 0$，所以 $x+1$ 整除 Q。記

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

使 n 恰好是 Q 中 $x+1$ 的冪次。於是 $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$，而

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

代入 $(**)$，並從兩邊約去公因式 $(x+1)^n$（右邊是 $(x+1)^{2n}R^2$）：

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

想一想 為甚麼要費功夫把 $x+1$ 的確切冪次抽出來，而不是直接再把 $x=-1$ 代入 $(**)$？

直接把 $x=-1$ 代入 $(**)$，只能告訴我們 $Q(-1)=0$；之後每一項都等於零，我們對 P 一無所知。把 Q 中所有 $x+1$ 的因式移除後，便剩下一項 $-nPR$，它在 $x=-1$ 時不會自動等於零。

現在代入 $x=-1$。由於 $n\geq 1$，右邊為 0，左邊第一項亦為 0。因此

$$-n\,P(-1)\,R(-1)=0.$$

但 $n\neq 0$ 且 $R(-1)\neq 0$，所以 $P(-1)=0$。於是 $x+1$ 既是 Q 的因式，也是 P 的因式，與兩者沒有公因式的假設矛盾。所以這樣的多項式不存在。 ■

（限定 P、Q 互質（coprime）並無損一般性：任何公因式都可以從 P/Q 中約去，而不改變該函數。）

驗算

- 直接對 (i) 的答案求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right)=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$，再加上 $\frac{x^2-2x}{x+1}=\frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$，得 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$，正如所需。
- 數值上，$\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\approx -1.359141$，與 $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1=-\frac{\mathrm{e}}{2}$ 相符。
- 在 (i) 中次數吻合：P 的次數為 2，比 $Q=x+1$ 多一。

常見錯誤

- 忘記 $P'Q-PQ'$ 的次數小於 $p+q$，因為首項互相抵消；決定次數的只有 PQ。
- 在 (ii) 中，只把 $x=-1$ 代入 $(**)$，求得 $Q(-1)=0$ 便停下來。要得出矛盾，必須用到 Q 中 $x+1$ 的確切冪次。

STEP 之外

第 (ii) 部分說明，$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$（本質上就是指數積分（exponential integral）Ei）在這個受限的意義下並不是「初等」（elementary）的。判定一個積分究竟能否用初等函數表示的完整理論，是劉維爾（Liouville）定理以及微分代數（differential algebra）中的 Risch 算法；這裏的論證只是其中一個小例子。若想仔細了解上面用到的多項式代數（因式定理、整除性、互質），可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。