詳細解答

STEP III 2016，第 2 題

純數學 • 拋物線的法線

> **STEP III 2016，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q2

關鍵思路

先寫出一般點 $(at^2, 2at)$ 處的法線（normal），再問哪些 t 值使法線經過 P。這個條件是一個關於 t 的三次方程（cubic），而且其中一個根 $t = p$ 必定存在（P 處的法線當然經過 P）。把這個根除去，剩下一個二次方程（quadratic），它的兩個根正好是 q 和 r。此後的一切都由兩根之和與兩根之積，即 $q + r$ 和 qr，來推動。

解答

第 (i) 部分

在 $y^2 = 4ax$ 上取 $x = at^2$、$y = 2at$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$，所以參數為 t 的點處的法線斜率（gradient）為 $-t$：

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{即} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

（這個形式同樣適用於頂點（vertex）$t = 0$，該處的法線就是 x 軸。）

t 處的法線經過 $P(ap^2, 2ap)$ 當且僅當

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3.$$

除以 $a > 0$ 並整理，得

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)(2 + t(p + t)) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

想一想 為甚麼可以捨去因子 $p-t$？

根 $t=p$ 是平凡的那一個：P 本身的法線經過 P。題目說明 $Q\neq P$，所以 $q\neq p$，因子 $p-q$ 不為零。因此

$$q^2+qp+2=0,$$

正是所求。同理 $r^2+rp+2=0$。

第 (ii) 部分

於是 q 和 r 都是 $t^2+pt+2=0$ 的根。由於 $Q\neq R$，有 $q\neq r$，所以它們就是這個方程的兩個根，從而

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

（特別地，判別式（discriminant）為正：$p^2>8$。另外留意，$q=p$ 需要 $2p^2+2=0$，這是不可能的，所以 Q 和 R 自動與 P 不同。）

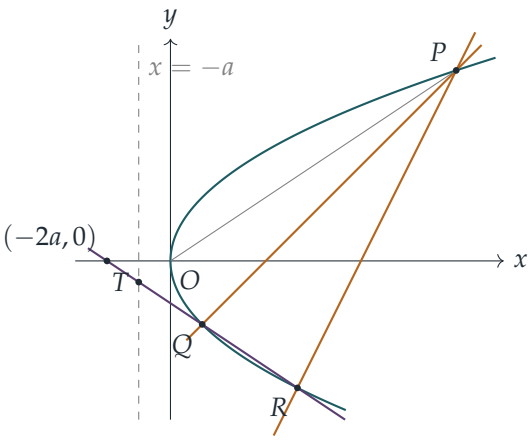
經過 $(aq^2,2aq)$ 和 $(ar^2,2ar)$ 的弦（chord）的斜率為 $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$，其方程為

$$(q+r)\,y=2x+2aqr.$$

（驗證：在 Q 處左邊是 $2aq^2+2aqr$，與右邊相等；在 R 處同理。）代入 $q+r=-p$ 和 $qr=2$：

$$-p\,y=2x+4a.$$

無論 p 取何值，點 $(-2a,0)$ 都滿足這個方程。所以 QR 必定經過 $(-2a,0)$，而這一點與 P 的選取無關。



上圖顯示 $a=1$、$p=3$ 的情況，此時 $q=-1$、$r=-2$：兩條法線（琥珀色）相交於 P，弦 QR（紫紅色）經過 $(-2,0)$，而 T 位於虛線 $x=-1$ 上。

第 (iii) 部分

由於 $p^2 > 8$，$p \neq 0$，所以 $P \neq O$，直線 OP 為 $y = \dfrac{2ap}{ap^2}\,x = \dfrac{2}{p}\,x$，即 $x = \frac{1}{2}py$。（它與 QR 不平行，因為後者的斜率是 $-2/p$。）

把 $x = \frac{1}{2}py$ 代入 QR 的方程：

$$-py = py + 4a \quad\Longrightarrow\quad y = -\frac{2a}{p}, \qquad x = \tfrac{1}{2}p\Big(-\frac{2a}{p}\Big) = -a.$$

所以 $T = (-a, -\frac{2a}{p})$，它必定位於直線 $x = -a$（拋物線的準線（directrix））上，與 P 的選取無關。

T 與 x 軸的距離是 $\dfrac{2a}{|p|}$。由第 (ii) 部分可知，經過 P 存在兩條不同的法線，這迫使 $p^2 > 8$，即 $|p| > 2\sqrt{2}$。由於 $a > 0$，

$$\frac{2a}{|p|} < \frac{2a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

證明完畢。不等式是嚴格的，因為 $p^2 = 8$ 會使 $q = r$。

驗算

- 在圖中 $a = 1$、$p = 3$ 的情況下：$t^2 + 3t + 2$ 的根是 -1 和 -2；法線 $y = x - 3$ 和 $y = 2x - 12$ 都經過 $P(9, 6)$；經過 $(1, -2)$ 和 $(4, -4)$ 的弦是 $-3y = 2x + 4$，它經過 $(-2, 0)$；而 $T = (-1, -\frac{2}{3})$，且 $\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$。
- 令 $|p| \to 2\sqrt{2}$ 從上方趨近，Q 和 R 會合而為一，T 的高度趨於 $a/\sqrt{2}$，所以這個界是最佳的。以電腦對 20,000 組隨機選取的 a 和 p 進行檢驗，所有結果均得到確認，T 的高度最高達到 $a/\sqrt{2}$ 的 0.9996 倍，但從未超過。

常見錯誤

- 忘記說明為何可以除以 $p - q$：正是條件 $Q \neq P$ 容許這樣做。
- 沒有利用 $q \neq r$ 來說明 q 和 r 都是同一個二次方程的根，而這正是得出 $q + r = -p$ 和 $qr = 2$ 的依據。
- 證明最後的界時沒有交代 $p^2 > 8$ 從何而來：它來自二次方程必須有兩個相異實根這一要求。

STEP 之外

第 (i) 部分背後關於 t 的三次方程，是一個經典事實的特例：對一般點 (h,k)，條件是 $at^3+(2a-h)\,t-k=0$，所以從平面上一點最多可以作三條拋物線的法線，而「一條法線」與「三條法線」兩個區域之間的分界是一條稱為漸屈線（evolute）的曲線（這裏是一條半立方拋物線（semicubical parabola））。漸屈線、包絡線（envelope）和曲率（curvature）都是曲線微分幾何（differential geometry）入門課程的標準課題。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）收錄了更多這種坐標幾何風格的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。