詳細解答

STEP III 2016，第 11 題

力學 • 功率與阻力

STEP III 2016，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

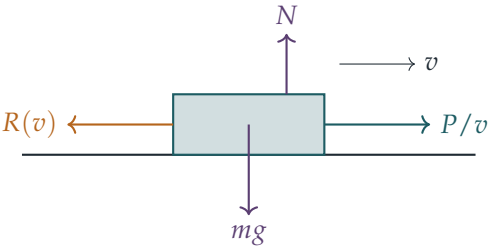
step.maths.org/questions/16-s3-q11

關鍵思路

以恆定功率（power）P 運作的引擎，在速率 v 時產生的牽引力為 P/v。由於我們要求的是以速率表示的距離，而非以時間表示，所以把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。這樣，牛頓第二定律（Newton's second law）就變成一條關於 x 與 v 的可分離變數微分方程（separable equation）。在 $4U$ 時加速度為零這個條件，可以把阻力常數以 P 和 U 表示出來，之後每段距離都歸結為一個定積分。

解答

我們把汽車模擬為一個質量為 m 的質點，沿水平直線運動，向前的牽引力為 P/v，向後的阻力為 $R(v)$。在鉛垂方向，重量與法向反作用力互相抵消，此後不再起任何作用。



利用 $a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，水平方向的運動方程為

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

在兩個模型中，$vR(v)$ 都隨 v 遞增，並在 $v = 4U$ 時等於 P。因此當 $U \le v \le 2U$ 時分母

為正，汽車在整個過程中確實一直在加速，即 x 隨 v 遞增，而所求距離為

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

第 (i) 部分

設 $R = kv$。在 $4U$ 時加速度為零，得 $\dfrac{P}{4U} = 4kU$，所以 $k = \dfrac{P}{16U^2}$。於是

$$P - kv^2 = k\,(16U^2 - v^2), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

因此

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

其中代入了 $v = Uw$。把被積函數寫成 $\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$，得

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

此即所求。

第 (ii) 部分

現設 $R = cv^2$。在 $4U$ 時加速度為零，得 $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$，所以 $c = \dfrac{P}{64U^3}$。於是

$$P - cv^3 = c\,(64U^3 - v^3), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

想一想 這裏有沒有簡潔的原函數？還是需要再用一次部分分式？

分子 v^2 除了相差一個常數倍外，正是分母 $64U^3 - v^3$ 的導數。所以這個積分可以直接得出對數：

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln(64U^3 - v^3)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

此即所求。

第 (iii) 部分

由於 $\lambda > 0$，$X_1 > X_2$ 當且僅當 $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$。題目只給出 $\ln 24$ 和 $\ln 5$ 的界，所以我們把差改寫成以這兩者表示：

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

想一想 每個界應該怎樣用，是用上界還是下界？

要證明差為正，我們需要一個下界，所以對 $\ln 24$（帶正號）用其下界，對 $\ln 5$（帶負號）用其上界：

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

因此 $X_1 > X_2$：汽車由 U 加速至 $2U$ 期間，阻力與速率成正比時所走的距離，比阻力與速率平方成正比時更遠。

這在物理上是合理的。兩種阻力在 $v = 4U$ 時相等，但當 $v < 4U$ 時，有 $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$。所以在所考慮的速率範圍內，平方定律的阻力較小，汽車加速得更猛，因而更快到達 $2U$。

驗算

- 數值上，$\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$，$\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$，所以差約為 0.0185，是正數，與所得結果一致。用電腦由 $v = U$ 開始按時間逐步模擬運動方程，可把兩個數值重現至小數點後五位。
- 單位：$P/(mU^3)$ 的單位是 $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$，所以 λX 是無量綱的，理應如此。
- 第 (iii) 部分末尾的物理論證，獨立地預測了同樣的大小次序。

常見錯誤

- 使用 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，這樣得到的是時間而不是距離。這裏需要的是 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。
- 在第 (iii) 部分把界用反了。用 3.18 和 1.60 只會得到一個上界，對差的正負號毫無證明作用。
- 忘記餘量極小（$0.00\dot{6}$），以致把 $\frac{4}{3}(3.17)$ 四捨五入為 4.2，結果便證不出來。

STEP 之外

把加速度寫成 $a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，是邁向大學力學中能量方法（energy method）的第一步。把運動方程乘以 v，便得到動能的變化率，它等於輸入功率減去耗散功率。像 $4U$ 這種兩者平衡的速率，是一階微分方程的平衡點（equilibria），而研究解如何趨近平衡點，正是動力系統（dynamical systems）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便以這種風格討論功、功率及與速度相關的力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。