詳細解答

STEP III 2016，第 10 題

力學 • 平面上的圓周運動

> **STEP III 2016，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

關鍵思路

只要繩子保持拉緊而質點留在斜面上，P 與 A 的距離恆為 a，且 P 位於斜面上，因此它在斜面內的一個圓上運動，圓心是由 A 向斜面所作垂線的垂足。在斜面之內，這不過是在減弱了的重力 $g\sin\alpha$ 下的鉛垂圓周運動；在垂直於斜面的方向，繩子把 P 拉離斜面，而法向反作用力（normal reaction）必須保持為正。所以我們先求張力（tension），再求反作用力，然後問兩者各自在何處最小。

解答

建立模型

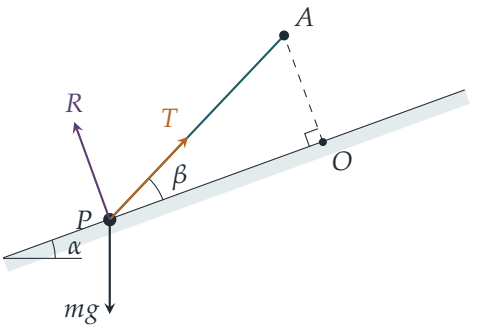
把 P 視為質點，繩子視為輕而不可伸長（inextensible），斜面視為光滑（smooth）。設 O 為由 A 向斜面所作垂線的垂足。由於繩長為 a，且與斜面成角 β，

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

在平衡（equilibrium）狀態下，除重力外，唯一有沿斜面分量的力是張力，因此繩子必須沿着一條最大斜率線（line of greatest slope），P 位於 O 沿斜面正下方。沿斜面及垂直於斜面方向分解力（張力 T_0，反作用力 R_0）：

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

所以 $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$。因此，平衡狀態要存在，就必須有 $\cos(\alpha+\beta) > 0$。



上圖是開始時經過一條最大斜率線的橫切面。AO 垂直於斜面。

施加衝量（impulse）之後，只要繩子保持拉緊而 P 留在斜面上，就有 $AP = a$ 及 $AO = a\sin\beta$，所以由畢氏定理（Pythagoras' theorem），$OP = a\cos\beta$ 恆成立：P 在斜面內一個以 O 為圓心、半徑為

$$r = a\cos\beta$$

的圓上運動。繩子與斜面所成的角恆為 β，而繩子在斜面上的投影由 P 指向 O。衝量是水平的，且平行於斜面，因此它在這個圓的最低點與圓相切。

設 θ 為 OP 與經過 O 向下的最大斜率線所成的角，於是開始時 $\theta = 0$；又設 v 為速率。重量沿斜面向下（在斜面內）的分量為 $mg\sin\alpha$，垂直壓入斜面的分量為 $mg\cos\alpha$。

垂直於斜面方向，P 沒有加速度，所以

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

在斜面內指向 O 的方向，加速度為 v^2/r。張力貢獻 $T\cos\beta$，而沿斜面向下的重量分量貢獻 $-mg\sin\alpha\cos\theta$：

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

能量：反作用力和張力都不做功（兩者各自垂直於速度），而 P 沿斜面上升的距離為 $r(1-\cos\theta)$，即上升高度為 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$。因此

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

不會立即離開斜面

剛施加衝量後，$\theta = 0$ 且 $v = u$。由 (2) 得 $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$，再由 (1) 得

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

由於 $\cos\beta > 0$，若

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

則反作用力為正，質點不會立即離開斜面，此即所求。

完整的圓周

現在把 (3) 代入 (2)，得出一般位置的張力：

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

於是由 (1)，

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

想一想 質點最有可能在圓上哪處離開斜面：頂部還是底部？

從鉛垂圓周運動得來的直覺會說「頂部」，但在這裏，頂部是繩子的危險位置，而不是斜面的。繩子以 $T\sin\beta$ 的力把 P 拉離斜面，而張力在底部最大，因為 P 在那裏速度最快，而斜面內的重力分量也把它拉離 O。事實上，R 在 $\cos\theta$ 最大時最小，即在 $\theta = 0$；而 T 在 $\cos\theta = -1$，即頂部時最小。所以要保持接觸地走完整個圓周，我們需要兩個條件。

- **底部保持接觸**。在 $\theta = 0$ 時 $R > 0$，這正是第一部分的條件：$u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$。
- **頂部繩子拉緊**。在 $\theta = \pi$ 時 $T \geq 0$：$\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$，即 $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$。(由 (3)，這同時保證頂部有 $v^2 > 0$。)

把第二個條件乘以 $\tan\beta > 0$，可見兩者能同時成立，僅當

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \leq u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

即

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

兩邊除以 $\cos\alpha\cos\beta > 0$，得到必要條件

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

（這條件也是充分的：若它成立，則任何滿足 $5ag\sin\alpha\cos\beta \le u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$ 的 u 都可行，因為此時 R 和 T 在圓上每一處都為正。）

驗算

- 當 $u = 0$ 時，第一部分的反作用力變成 $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$，與平衡值 R_0 吻合。
- 若 $\beta \to 0$（繩子幾乎沿着斜面），繩子無法把質點提起，而條件 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$ 自動成立，理應如此。
- 取 $\alpha = 30°$、$\beta = 5°$（於是 $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$）、$a = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，容許範圍是 $24.4 \le u^2 < 91.8$（單位為 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$）。取 $u^2 = 50$，則最小反作用力約為 $0.37mg$，出現在底部；最小張力約為 $2.63mg$，出現在頂部。我們用電腦在三維空間中沿整個圓周求解牛頓第二定律（Newton's second law），證實 R 和 T 保持為正，數值與上述相符。

常見錯誤

- 把整條繩長 a 當作圓的半徑：半徑是 $a\cos\beta$。
- 以為質點最有可能在圓的頂部離開斜面。反作用力其實在底部最小。
- 在能量方程中用 g 而不是 $g\sin\alpha$：質點在鉛垂方向只上升 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$。

STEP 之外

這是約束（constraints）下的運動：斜面和繩子各自提供一個反作用力，其大小恰好是維持約束所需的大小，而運動只有在這些力的正負號正確時才成立。在大學一年級的課程中，你會學到如何有系統地處理這類問題，就是利用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）消去約束，之後再求回反作用力。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）收錄了許多正是這類「何時失去接觸？」的問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。