詳細解答

STEP III 2016，第 1 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP III 2016，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q1

關鍵思路

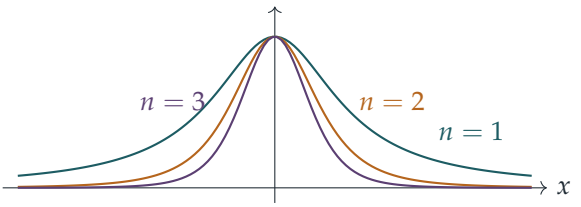
配方（completing the square）把二次式化成 $(x+a)^2+c^2$，其中 $c^2=b-a^2>0$，之後用正切代換（tangent substitution）便可立即求出 I_1。至於遞推公式（reduction formula），竅門在於對 1 進行分部積分（integration by parts）：對 $(x^2+2ax+b)^{-n}$ 求導會把冪次提升到 $n+1$，這正是我們把 I_n 與 I_{n+1} 聯繫起來所需要的。其後的歸納法（induction）只不過是整理二項式係數（binomial coefficient）而已。

解答

全文記

$$Q(x)=x^2+2ax+b=(x+a)^2+c^2, \qquad c=\sqrt{b-a^2}>0.$$

由於對所有 x 都有 $Q(x)\geq c^2>0$，被積函數（integrand）是連續的；又由於 $Q(x)^n$ 的增長速度與 x^{2n} 相若，且 $2n\geq 2$，所以每個 I_n 都收斂（converge）。



當 $a=0$、$b=1$ 時的被積函數 $1/Q^n$：隨着 n 增大，曲線變得愈來愈窄，因此我們預期當 $c=1$ 時 I_n 會逐漸變小。

第 (i) 部分

設 $x + a = c\tan u$，則 $\mathrm{d}x = c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$。當 x 由 $-\infty$ 變到 ∞ 時，u 由 $-\frac{\pi}{2}$ 變到 $\frac{\pi}{2}$，而且

$$Q(x) = c^2\tan^2 u + c^2 = c^2\sec^2 u.$$

因此

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

對 I_n 進行分部積分，取 $u = Q^{-n}$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$。取 $v = x + a$ 比取 $v = x$ 更巧妙（任何原函數（antiderivative）皆可），因為 $Q'(x) = 2(x+a)$。於是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q^{-n} = -2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

所以

$$I_n = \Big[\,\frac{x+a}{Q^n}\,\Big]_{-\infty}^{\infty} + 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 為甚麼邊界項（boundary term）會等於零？

分子的增長速度與 $|x|$ 相若，而分母的增長速度與 x^{2n} 相若，又因為 $n \geq 1$，所以 $2n \geq 2$。因此當 $x \to \pm\infty$ 時 $(x+a)/Q^n \to 0$，方括號內的項為零。

接着利用 $(x+a)^2 = Q - c^2$ 把餘下的積分拆開：

$$\begin{aligned} I_n &= 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\,I_n - 2nc^2\,I_{n+1}. \end{aligned}$$

移項得 $2nc^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n$，即

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n,$$

即為所求。（由於 I_n 與 I_{n+1} 均收斂，這樣拆開積分是合理的。）

第 (iii) 部分

設 $P(n)$ 為命題

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$

其中 $c^{2n-1} = (b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$。

基本情況。當 $n=1$ 時，右方為 $\dfrac{\pi}{2^0c^1}\binom{0}{0}=\dfrac{\pi}{c}$，由第 (i) 部分可知它等於 I_1。所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟。假設對某個 $n\geq 1$，$P(n)$ 成立。由第 (ii) 部分，

$$I_{n+1}=\frac{2n-1}{2nc^2}\,I_n=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

我們要證明它等於 $\dfrac{\pi}{2^{2n}c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$，這就是 $P(n+1)$。兩個二項式係數之間的關係是

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

想一想 怎樣才能令 2 的冪次吻合？

寫成 $\dfrac{2n-1}{2n}=\dfrac{4}{2^2}\cdot\dfrac{2n-1}{2n}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2(2n-1)}{n}$。於是

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1}\\&=\frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

由於 $2n=2(n+1)-2$、$n=(n+1)-1$ 及 $c^{2n+1}=(b-a^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}}$，這正是 $P(n+1)$。由歸納法，$P(n)$ 對所有正整數 n 成立：

$$I_n=\frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

驗算

- 取 $a=0$、$b=1$ 及 $n=2$，公式給出 $I_2=\frac{\pi}{4}\binom{2}{1}=\frac{\pi}{2}\approx 1.5708$。以數值方法計算 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$，結果準確至小數點後十位都吻合。
- 正切代換亦給出 $I_n=c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$，這是標準的沃利斯積分（Wallis integral），其已知值與公式相符。
- 對多組滿足 $b>a^2$ 的隨機 a 和 b，數值積分證實公式在 $n=1,\ldots,5$ 時成立，因此第 (ii) 部分的遞推關係（recurrence）亦獲證實。

常見錯誤

- 忘記說明第 (ii) 部分的邊界項為何等於零；這需要 $n\geq 1$。

- 在分部積分中取 $v = x$ 而不取 $v = x + a$。這樣做仍然可行，但會多出一項 $a\int (x + a)Q^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ 需要處理。
- 在歸納步驟中弄錯 $b - a^2$ 的冪次：每一步都乘以 $1/c^2$，所以 c 的指數剛好增加 2，由 $2n - 1$ 變為 $2n + 1$。

STEP 之外

有理函數在整條實數線上的積分，是展示複分析（complex analysis）威力的絕佳例子：留數定理（residue theorem）只需考慮 $1/Q^n$ 在上半平面（upper half-plane）內位於 $z = -a + ic$ 的唯一極點（pole），寥寥數行便能求出 I_n。這裏出現的中心二項式係數（central binomial coefficient）亦見於 π 的沃利斯乘積（Wallis product）及隨機漫步（random walk）之中。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以優美的幾何方式闡述留數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。