詳細解答

STEP II 2016，第 9 題

力學 • 動量與能量損失

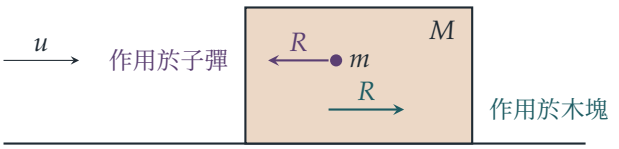
> **STEP II 2016，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q9

關鍵思路

阻力 R 是子彈與木塊之間的內力（internal force）：它令子彈減速，而根據牛頓第三定律（Newton's third law），它同時以相同大小把木塊向前推。因此兩者組成的系統動量守恆（conservation of momentum），但動能（kinetic energy）並不守恆。損失的能量恰好等於 R 沿子彈在木塊內移動的相對距離所做的功。對木塊單獨應用功能原理（work–energy principle），便可求出木塊移動的距離。

解答

我們把子彈和木塊視為沿同一條水平直線運動的質點，並假設子彈相對木塊運動期間阻力 R 保持不變。取子彈的初始運動方向為正方向。



鉛垂方向的力（重力及桌面的法向反作用力）互相平衡，不起任何作用。在水平方向上，子彈受向後的力 R，木塊則受向前的力 R。

第 (i) 部分

木塊固定時，子彈的減速度恆為 R/m。利用 $v^2 = u^2 + 2\alpha s$，代入末速 0 及 $\alpha = -R/m$：

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

（等價地說，克服阻力所做的功 Ra 等於子彈的初始動能 $\frac{1}{2}mu^2$。）

第 (ii) 部分

共同末速度。由於桌面光滑，子彈和木塊組成的系統不受任何水平外力。當子彈相對木塊靜止時，兩者以相同速度 V 運動，由動量守恆得

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

> ? **想一想** 阻力在子彈於木塊內的路徑上作用了距離 b，但子彈本身相對桌面移動了 $b+c$。能量方程中應該用哪一個距離？

求 b。相對桌面而言，作用於子彈的力 R 所做的功為 $-R(b+c)$，因為子彈移動了 $b+c$；作用於木塊的力 R 所做的功為 $+Rc$，因為木塊移動了 c。因此對整個系統所做的淨功為 $-Rb$：只有相對位移才算數。由功能原理，

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

由於第 (i) 部分得 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$，兩邊除以 R 得

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}\,a.}$$

求 c。現在對木塊單獨應用功能原理。木塊由靜止開始，最終速率為 V，而它所受的唯一水平力是向前的 R，作用距離為 c：

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

再次利用 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$，

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

另一方法：運動學。子彈以 R/m 減速，木塊以 R/M 加速。當 $u - Rt/m = Rt/M$ 時兩者速度相等，所以

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

與上面的結果一致；而 b 則等於子彈的位移減去 c。

驗算

- 當 $M \to \infty$ 時，木塊的表現猶如固定不動：$b \to a$ 且 $c \to 0$，正合所料。
- 由於 $\frac{M}{M+m} < 1$，故 $b < a$：可移動的木塊把較少的子彈能量轉化為熱，所以子彈穿入得沒有那麼深。
- 取 $M = 4m$，得 $b = \frac{4}{5}a$ 及 $c = \frac{4}{25}a$。以細小的時間步長逐步數值模擬運動，並隨機選取多組 m、M、u 和 R，所得的 a、b 和 c 均準確至四位有效數字。

常見錯誤

- 在能量損失方程中用了子彈相對桌面的距離 $b + c$，而非相對距離 b。
- 假設碰撞中動能守恆；事實並非如此，損失的 Rb 就是所產生的熱。
- 忘記木塊同樣受到力 R 的作用（牛頓第三定律），以致無法解釋木塊的運動。

STEP 之外

內力只有在沒有相對運動時才做零淨功，這個事實正是嚴謹處理質點系能量的起點。在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理，問題就變得簡潔：可供耗散的動能為 $\frac{1}{2}\mu u^2$，其中約化質量（reduced mass）$\mu = mM/(M+m)$，而這恰好就是本題中的 Rb。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有詳盡的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。