詳細解答

# STEP II 2016，第 8 題

純數學 • 以積分近似求和

> **STEP II 2016，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q8

## 關鍵思路

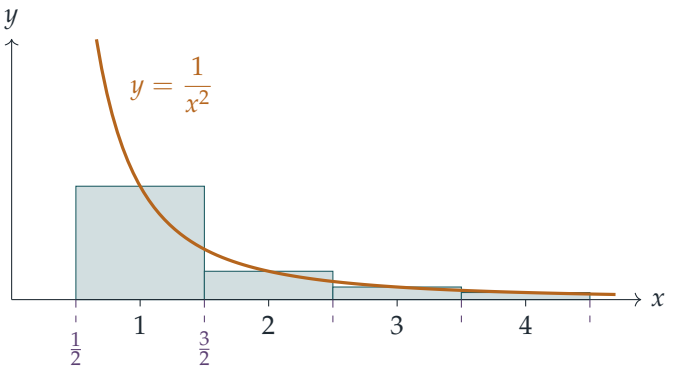
項 $\frac{1}{r^2}$ 是一個寬 1、高 $\frac{1}{r^2}$ 的長方形的面積。若這個長方形以 $x = r$ 為中心，它的面積就非常接近 $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $r - \frac{1}{2}$ 與 $r + \frac{1}{2}$ 之間曲線下的面積，這就是中點法則（midpoint rule）。把這些窄條拼接起來，一個和式就變成一個積分。接着可以準確算出每一窄條的誤差（error），而把這些誤差加起來，幾乎不費吹灰之力就得到第二個級數（series）$\sum \frac{1}{r^4}$。

## 解答

### 積分與草圖

當 $m > \frac{1}{2}$ 時，積分下限為正，所以被積函數（integrand）在積分範圍內連續，並且

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$




以 $x = r$ 為中心的長方形寬 1、高 $\frac{1}{r^2}$，所以面積是 $\frac{1}{r^2}$。在窄條 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$ 上，曲線在左半邊位於長方形頂邊之上，在右半邊則位於其下，而這兩小塊幾乎互相抵消。因此

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

對 $r = m, m+1, \ldots, n$ 把這些式子相加，各窄條首尾相接，剛好覆蓋 $[m - \frac{1}{2},\, n + \frac{1}{2}]$，於是得到 $(*)$。

### 第 (i) 部分

在 $(*)$ 中令 $n \to \infty$。右邊趨向我們剛才算出的積分，所以

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

我們可以把這個近似用於整個級數，也可以先準確地加上頭幾項，只對尾部（tail）作近似：

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

這就是題目要求的三個近似值。隨着 $m$ 增大，近似應該愈來愈好，因為曲線在愈遠處愈平坦，中點近似在那裏也愈準確。

### 第 (ii) 部分

在一個窄條上的積分是

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

所以用這個積分近似 $\frac{1}{r^2}$ 的誤差是

$$\frac{4}{4r^2-1}-\frac{1}{r^2}=\frac{4r^2-(4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)}=\frac{1}{r^2(4r^2-1)}=\frac{1}{4r^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4r^2}}.$$

當 $r$ 很大時，$\frac{1}{4r^2}$ 很小，所以最後一個因子接近 1，誤差約為 $\frac{1}{4r^4}$，正如題目所要求。（積分值總是較大，這與圖像吻合：$\frac{1}{x^2}$ 是凸函數（convex），所以每個窄條左邊多出的面積勝過右邊不足的面積。）

至於最後的結果，把由 $r=m$ 起的誤差全部加起來。各窄條的積分加起來正是我們最先算出的積分，所以

$$\frac{2}{2m-1}-\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)}\approx\frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

**想一想** 為甚麼不取看來最簡單的 $m=1$？

取 $m=1$ 時，左邊是 $2-1.645=0.355$，得出 $\sum\frac{1}{r^4}\approx 1.42$，這大得太多了。問題在於「$\approx\frac{1}{4r^4}$」只在 $r$ 很大時才準確：在 $r=1$ 時，真正的誤差是 $\frac{1}{3}$ 而非 $\frac{1}{4}$，而這第一項主導了整個和。所以我們應該把頭幾項準確保留，只對尾部使用近似。取 $m=3$（即得出 $\frac{33}{20}$ 的那個選擇），最差的因子 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$ 是 $\frac{36}{35}$，與 1 相差不足 3%：

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx\frac{2}{5}-\left(E-1-\frac{1}{4}\right)\approx 0.4-0.395=0.005,$$

所以 $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx 0.02$，而

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx 1+\frac{1}{16}+0.02=1.0825\approx 1.08.$$

這就是所要求的結果。由於 $E$ 只給到三位小數，$E$ 中最多 0.0005 的誤差在這裏會變成最多 0.002，結果仍然是 1.08。

## 驗算

- 近似值 2、$\frac{5}{3}\approx 1.667$、$\frac{33}{20}=1.65$ 逐步遞減，趨向 $E=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.6449$，而且每一個都偏大，正如凸性論證所預測。
- 在 $r=10$ 時，準確誤差 $\frac{1}{100\times 399}\approx 2.506\times 10^{-5}$ 非常接近 $\frac{1}{4\times 10^4}=2.5\times 10^{-5}$。
- 準確值是 $\sum\frac{1}{r^4}=\frac{\pi^4}{90}\approx 1.0823$，與我們的 1.0825 吻合。若改用 $m=2$，得 $1+4\left(\frac{2}{3}-0.645\right)\approx 1.087$，明顯較差；$m=1$ 則得 1.42。

## 常見錯誤

- 在最後一部分使用 $m = 1$，而大 $r$ 近似 $\frac{1}{4r^4}$ 在那裏並不準確，結果得出 1.42。
- 把誤差的正負號弄反：積分大於 $\frac{1}{r^2}$，所以 $\frac{2}{2m-1}$ 是尾部的高估值。
- 忘記把準確計算的頭幾項（$1 + \frac{1}{4}$ 及 $1 + \frac{1}{16}$）加回去。

## STEP 之外

這就是中點法則，而誤差項 $\frac{1}{4r^4}$ 讓我們窺見歐拉–麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）：它以一個積分加上一連串導數項來修正一個和式，而像 $\sum \frac{1}{r^2}$ 這樣的和，正是這樣計算到許多位小數的。準確值 $\frac{\pi^2}{6}$ 和 $\frac{\pi^4}{90}$ 來自傅里葉級數（Fourier series），或來自歐拉（Euler）對 $\sin x$ 的乘積展開。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔細地處理級數與積分，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）則有更多同類精神的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。