詳細解答

STEP II 2016，第 7 題

純數學 • 利用對稱性求定積分

> **STEP II 2016，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q7

關鍵思路

把區間 $[0, a]$ 關於其中點作反射（reflection），即 $x \mapsto a - x$，積分的值不會改變，但被積函數（integrand）卻可能變成一個能與原式漂亮地結合的形式。對於 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的三角被積函數，這個反射會把 sin 與 cos 互換；在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，則靠 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$ 的複角公式（compound-angle formula）來完成工作。最後一部分看似全新，但一次分部積分（integration by parts）就能把它化為第 (iii) 部分。

解答

結果 $(*)$

在 $\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ 中作代換（substitution）$u = a - x$，於是 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$；當 $x = 0$ 時 $u = a$，當 $x = a$ 時 $u = 0$。因此

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因為積分變量用甚麼名稱並不重要。這就是 $(*)$。

第 (i) 部分

設該積分為 I。取 $a = \frac{1}{2}\pi$，有 $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ 及 $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$，所以由 $(*)$ 得

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

把它與 I 的原來形式相加，

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

（分母 $\cos x + \sin x$ 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上為正，因此不會出問題。）

第 (ii) 部分

現在 $a = \frac{1}{4}\pi$，第 (i) 部分的技巧不再能互換 sin 與 cos。改為把分子分母同除以 $\cos x$（在此區間上為正），被積函數變成

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

設 $t = \tan x$。由於 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$，

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

於是設該積分為 J，由 $(*)$ 得

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

想一想 有沒有方法完全不用 $(*)$ 就能做第 (ii) 部分？

有。設 $K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$。那麼 $J + K = \frac{1}{4}\pi$；又因為分子 $\cos x - \sin x$ 正是分母的導數，

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

兩式相減，得 $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$，與上面的答案一致。

第 (iii) 部分

設該積分為 L。同一條複角公式給出

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

所以由 $(*)$，

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln \frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1+\tan x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - L.$$

因此 $2L = \frac{1}{4}\pi \ln 2$，而

$$L = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

第 (iv) 部分

把分子分母同除以 $\cos^2 x$：

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

? **想一想** $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$ 跟第 (iii) 部分有甚麼關係？

它恰好是 $\ln(1+\tan x)$ 的導數，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x) = \sec^2 x$；而且在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $1+\tan x > 0$。於是取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$、$v = \ln(1+\tan x)$ 作分部積分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{（利用第 (iii) 部分）} \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

所以第 (iv) 部分的積分與第 (iii) 部分的積分數值相同。

驗算

- 第 (i) 部分：被積函數由 0 升至 1，並關於點 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$ 對稱，所以其平均值為 $\frac{1}{2}$，積分等於區間長度的一半，即 $\frac{1}{4}\pi$。
- 第 (ii) 部分應小於第 (i) 部分的一半，因為被積函數在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上低於 $\frac{1}{2}$：的確 $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.2194 < 0.3927$。
- 數值積分（numerical quadrature）（辛普森法則（Simpson's rule））給出四個部分的值分別為 0.785398、0.219412、0.272198 及 0.272198，與 $\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$ 及 $\frac{1}{8}\pi \ln 2$（兩次）吻合。

常見錯誤

- 忘記代換 $u = a - x$ 會把積分上下限對調；而 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ 中的負號會把它們調回來。

- 在第 (ii) 部分仿照第 (i) 部分試圖互換 sin 與 cos：在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，反射是 $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$，而不是 $\frac{1}{2}\pi - x$。
- 寫成 $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \ln \cos x$；正確應為 $-\ln \cos x$（或 $\ln \sec x$）。

STEP 之外

第 (iii) 部分是經典題：同一個反射技巧可以求出像 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$ 這類積分，而這些積分無法透過初等函數（elementary functions）的原函數（antiderivative）求得。到了大學，這類對稱性論證與圍道積分（contour integration）及積分號下求導（differentiation under the integral sign）並列，都是處理沒有初等原函數的定積分（definite integral）的工具。想看更多富 STEP 風格的例子，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）；至於為代換法與分部積分提供嚴格依據的分析（analysis），可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。