詳細解答

STEP II 2016，第 6 題

純數學 • 切比雪夫多項式方程

STEP II 2016，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s2-q6

關鍵思路

每一部分都只需把一個候選函數代入微分方程(differential equation)，並檢查它在 $x = 1$ 處的條件；其餘的就交給唯一性（uniqueness）假設。第 (iii) 及 (iv) 部分的竅門是：永遠不要展開 y_n（我們並不知道它的明確表達式），而是直接利用方程 $(1 - x^2)y_n'^2 = n^2(1 - y_n^2)$ 本身來消去導數（derivative）。

解答

在整個解答中，y_k 滿足

$$(1 - x^2)(y_k'(x))^2 = k^2(1 - y_k(x)^2), \qquad y_k(1) = 1,$$

這不過是 $(*)$ 移項後的形式。要證明某函數等於 y_k，(根據所假設的唯一性) 只需證明它在該 k 值下滿足 $(*)$，並且在 $x = 1$ 處取值 1。

第 (i) 部分

當 $k = 1$ 時，方程為

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

對於 $y = x$，我們有 $y' = 1$，而左方為 $(1 - x^2) + x^2 = 1$，符合要求。此外 $y(1) = 1$，所以 $y_1(x) = x$。

第 (ii) 部分

當 $k = 2$ 時，方程為

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

對於 $y = 2x^2 - 1$，我們有 $y' = 4x$，所以

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4\\ &= 4.\end{aligned}$$

由於 $y(1) = 2 - 1 = 1$，我們得到 $y_2(x) = 2x^2 - 1$。

第 (iii) 部分

為簡便起見，記 $y = y_n(x)$。以鏈式法則 (chain rule) 對 $z = 2y^2 - 1$ 求導，得 $z' = 4yy'$，所以

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

這裏用到了 y_n 所滿足的方程。此外

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

兩式相加，

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

這正是所求的方程。

> ? **想一想** 這條方程與 y_{2n} 有甚麼關係？

由於 $(2n)^2 = 4n^2$，它恰好就是 $k = 2n$ 時的 $(*)$。而且 $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$。所以 z 是 $k = 2n$ 時 $(*)$ 的一個解，並且在 $x = 1$ 處取值 1；根據唯一性，

$$y_{2n}(x) = 2(y_n(x))^2 - 1.$$

作為驗證，$n = 1$ 給出 $y_2 = 2x^2 - 1$，與 (ii) 一致；而 $n = 2$ 給出 $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$。

第 (iv) 部分

記 $u = y_m(x)$，於是 $v = y_n(u)$。根據鏈式法則，

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

因此，先用 y_m 的方程（在點 x），再用 y_n 的方程（在點 u），得

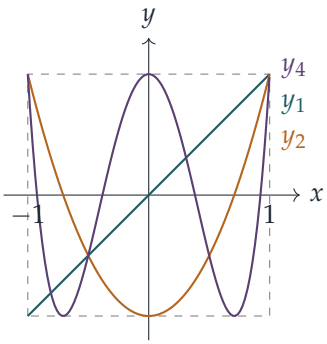
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2(1-y_n(u)^2) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

所以 $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$，即 $k=mn$ 時的 $(*)$。最後

$$v(1)=y_n(y_m(1))=y_n(1)=1,$$

所以根據唯一性，$v(x)=y_{mn}(x)$，得證。

y_n 的方程是在點 u 而非點 x 應用的：該方程對其變量的每一個值都成立，所以我們可以用 u 代替 x。正是這一步令 (iv) 得以成立。



三條曲線都通過 $(1,1)$，並且在 $[-1,1]$ 上都介乎 -1 與 1 之間，這是方程所迫使的：在該區間上 $(1-x^2)y'^2\geq 0$，所以 $k^2y^2\leq k^2$。

驗算

- 第 (iii) 部分取 $n=2$，預測 $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$。直接代入，$y_4'=32x^3-16x$，而 $(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$ 化簡後等於 16。在 $x=0.3$ 處，$y_4=0.3448$。
- 第 (iv) 部分取 $m=n=2$：$y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$，與 (iii) 得出的 y_4 相同，理應如此。
- 以電腦用精確算術驗證過：以這種方法構造的多項式對每個不超過 24 的 k 都滿足 $(*)$，而且對 $m,n\leq 4$ 有 $y_n(y_m(x))=y_{mn}(x)$。

常見錯誤

- 忘記 $x = 1$ 處的條件。單單滿足 $(*)$ 並不足夠：$-y_k$ 同樣滿足它。
- 在 (iii) 或 (iv) 中試圖明確展開 y_n。我們對 y_n 並沒有任何明確的認識；應利用它的微分方程來取代 $(1-x^2)y_n'^2$。
- 在 (iv) 中，把 y_n 的方程用在 x 上，而不是 $u = y_m(x)$ 上，結果令因子 $(1-x^2)$ 出現在錯誤的位置。

STEP 之外

函數 y_k 就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）T_k：設 $x = \cos\theta$，$(*)$ 便化為 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1-y^2)$，其解為 $y = \cos k\theta$，因此 $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$。於是第 (iii) 部分就是二倍角公式，而第 (iv) 部分說的是 $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$。不過要提醒一句：題目容許你假設的唯一性其實並不完全成立，因為常數函數 $y = 1$ 同樣滿足 $(*)$ 及 $y(1) = 1$。像這樣導數只能確定至正負號的方程，正是使用唯一性定理時須格外小心的地方；Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了解的存在性與唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。