詳細解答

STEP II 2016，第 5 題

純數學 • 二項式係數恆等式

> **STEP II 2016，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q5

關鍵思路

三條恆等式（identity）都源自同一個技巧：把一個函數用兩種方式寫成乘積，然後比較 x 某一個冪的係數（coefficient）。若一個和式由二項式係數（binomial coefficient）的乘積組成，而各下標之和固定，那正正就是把兩個冪級數（power series）相乘後讀出某一項係數所得的結果。題目約定在 $p \geq q \geq 0$ 以外 $\binom{p}{q} = 0$，正因如此，和式可以在一個整齊的 j 範圍內求和，而不必費神理會哪些項存在。

解答

第 (i) 部分

當 $|x| < 1$ 時，由二項式級數（binomial series）可得 $(1-x)^{-N}$ 中 x^n 的係數為

$$\begin{aligned}\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n &= \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.\end{aligned}$$

各因子帶來的 n 個負號，與 $(-x)^n$ 帶來的 n 個負號互相抵消。因此

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

（當 $n = 0$ 時，係數為 $\binom{N-1}{0} = 1$。由於 $N \geq 1$，這沒有問題。）

現在 $(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$。把上述展開式中的 N 換成 $N+1$，可知右邊 x^n 的係數為 $\binom{N+n}{n}$。

在左邊，$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$ 的每一項係數都等於 1。$(1-x)^{-N}$ 中的 x^j 項必須與 $(1-x)^{-1}$ 中的 x^{n-j} 配對，而 j 由 0 取到 n。所以乘積中 x^n 的係數為

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

兩個冪級數在 $|x|<1$ 時都收斂（converge），並在該處表示同一個函數，因此它們的係數相同。於是得到

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

利用 $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$，三者皆為多項式（polynomial）。按題目的約定，可以寫成

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

因為 $j > m$ 或 $k > n$ 的係數均為零。乘積中 x^r 的係數來自滿足 $j+k=r$ 的配對，即 $k = r-j$ 且 $0 \leq j \leq r$：

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

? **想一想** 那麼 $j > m$ 或 $r-j > n$ 的項又如何？這些冪並不出現在多項式之中。

這些項含有因子 $\binom{m}{j}$（其中 $j > m$）或 $\binom{n}{r-j}$（其中 $r-j > n$），按約定它們都是零。它們沒有任何貢獻，同時也不對應任何實際的項的乘積，所以在 $0 \leq j \leq r$ 上求和恰好正確。$(1+x)^{m+n}$ 中 x^r 的係數為 $\binom{m+n}{r}$。相等的多項式有相同的係數，因此

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

第 (iii) 部分

因子 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$ 提示我們用第 (i) 部分，並以 $-x$ 代替 x。在第 (i) 部分的展開式中以 $-x$ 代替 x，並以 m 代替 N，可得

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m+j-1}{j} x^j \qquad (|x|<1).$$

? **想一想** 應該用哪一個乘積？

另一個因子 $\binom{N+m}{n-j}$ 是 $(1+x)^{N+m}$ 的係數，而答案 $\binom{N}{n}$ 是 $(1+x)^N$ 的係數。由於 m 是正整數，當 $|x|<1$ 時有

$$(1+x)^{N+m}(1+x)^{-m}=(1+x)^N.$$

在左邊，$(1+x)^{N+m}=\sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$（對 $k>N+m$ 使用上述約定）。x^n 的係數來自 $(1+x)^{-m}$ 中的 x^j 乘以 $(1+x)^{N+m}$ 中的 x^{n-j}，其中 $0\leq j\leq n$：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

在右邊，$(1+x)^N$ 中 x^n 的係數為 $\binom{N}{n}$。當 $n>N$ 時，按約定它等於 0，這也是正確的，因為 $(1+x)^N$ 的次數是 N。兩邊在 $|x|<1$ 上相等，所以它們的冪級數係數相同：

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j}=\binom{N}{n}.$$

驗算

- 第 (i) 部分，取 $N=2$、$n=3$：$1+2+3+4=10=\binom{5}{3}$。
- 第 (ii) 部分，取 $m=n=2$、$r=2$：$1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1=6=\binom{4}{2}$。
- 第 (iii) 部分，取 $m=2$、$N=3$、$n=2$：$\binom{5}{2}\binom{1}{0}-\binom{5}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{0}\binom{3}{2}=10-10+3=3=\binom{3}{2}$。當 $n>N$ 時，這個正負交替的和應該等於 0。例如取 $m=1$、$N=1$、$n=2$，得 $\binom{2}{2}-\binom{2}{1}+\binom{2}{0}=1-2+1=0$。

三條恆等式亦已用電腦對所有 $m,N\leq 9$ 及 $n\leq 24$ 驗證過。

常見錯誤

- 在 $(1-x)^{-N}$ 的係數中弄亂了正負號。那裏有兩組 $(-1)^n$，兩者互相抵消。
- 在第 (iii) 部分，忘記 $(1+x)^{-m}$ 的級數是無窮級數，只在 $|x|<1$ 時成立。比較係數之所以成立，是因為在某區間上相等的兩個冪級數，其係數相同。

STEP 之外

這就是*生成函數*（generating functions）的方法：把一個數列編碼為某冪級數的係數，於是級數相乘便化為這裏所見的卷積（convolution）和。第 (ii) 部分是范德蒙恆等式（Vandermonde's identity），而第 (i) 部分常被稱為曲棍球棒恆等式（hockey-stick identity）。

兩者都有漂亮的組合計數證明（counting proof），值得自己找找看。Wilf 的 *generating-functionology*（可在網上免費閱讀），以及 Graham、高德納（Knuth）與 Patashnik 合著的 *Concrete Mathematics*（《具體數學》），都把這套工具發展得更深入。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。