詳細解答

STEP II 2016，第 4 題

純數學 • 有理函數的值域

> **STEP II 2016，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q4

關鍵思路

去分母後，y 的定義便化為一條關於 x 的二次方程（quadratic equation），而「x 是實數」就變成「判別式（discriminant）非負」。要消去 θ，我們需要一個對所有 θ 都成立的 $y\cos\theta - \sin\theta$ 的上界（upper bound）；把它寫成 $(y,-1)$ 與單位向量（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ 的點積（dot product），便恰好得到 $\sqrt{y^2+1}$。在第 (ii) 部分，不等式鏈中的每一個不等式都必須取等號，而這正好把 x 和 θ 都確定下來。

解答

第 (i) 部分

首先留意分母永不為零：把 $x^2 + x\cos\theta + 1$ 看作 x 的二次式，其判別式為 $\cos^2\theta - 4 < 0$，所以它恆為正。因此可以放心地兩邊相乘：

$$y(x^2 + x\cos\theta + 1) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

若 $y \neq 1$，這是一條真正關於 x 的二次方程，而它有實根 x 當且僅當其判別式非負：

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

若 $y = 1$，所求的不等式變為 $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$，這本來就成立。所以對實數 x，

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

即為所求。

想一想 怎樣才能消去 θ？我們需要一個比 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2$ 大、而又不依賴 θ 的式子。

式子 $y\cos\theta-\sin\theta$ 是 $(y,-1)$ 與單位向量 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的純量積（scalar product），所以其大小至多為 $|(y,-1)|=\sqrt{y^2+1}$。等價地，由柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality），或直接由

$$(y^2+1)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-(y\cos\theta-\sin\theta)^2=(y\sin\theta+\cos\theta)^2\geq 0,$$

可得 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2\leq y^2+1$。把這與第一個結果結合，

$$y^2+1\geq(y\cos\theta-\sin\theta)^2\geq 4(y-1)^2,$$

這就是第二個不等式。

展開得 $y^2+1\geq 4y^2-8y+4$，即

$$3y^2-8y+3\leq 0.$$

$3y^2-8y+3=0$ 的根為 $y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-36}}{6}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，而由於這個二次式的首項係數（leading coefficient）為正，它恰好在兩根之間取非正值。因此

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

第 (ii) 部分

設 $y=\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$，則 $y-1=\frac{1}{3}(1+\sqrt{7})>0$。於是

$$y^2+1=\frac{16+8\sqrt{7}+7}{9}+1=\frac{32+8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2=\frac{4(1+2\sqrt{7}+7)}{9}=\frac{32+8\sqrt{7}}{9}.$$

兩者相等，而且 $2(y-1)>0$，所以取正平方根便得 $\sqrt{y^2+1}=2(y-1)$，即為所求。（這是理所當然的：y 是 $3y^2-8y+3=0$ 的根，而這條方程正是 $y^2+1=4(y-1)^2$。）

想一想 這個等式對第 (i) 部分的不等式鏈說明了甚麼？

不等式鏈 $y^2+1\geq(y\cos\theta-\sin\theta)^2\geq 4(y-1)^2$ 的兩端現在相等，所以兩個不等式都取等號。

判別式爲零，所以關於 x 的二次方程有重根（repeated root）

$$x=-\frac{y\cos\theta-\sin\theta}{2(y-1)}.$$

關於 θ 的上界被達到，所以 $y\sin\theta+\cos\theta=0$，從而

$$\tan\theta=-\frac{1}{y}=-\frac{3}{4+\sqrt{7}}=-\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7}=\frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

（此處 $\cos\theta\neq 0$，否則 $\sin\theta=0$ 亦成立，這是不可能的。）此外 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2=y^2+1=4(y-1)^2$，所以 $y\cos\theta-\sin\theta=\pm 2(y-1)$，因此

$$x=\mp 1.$$

具體來說，$(\cos\theta,\sin\theta)$ 與 $(y,-1)$ 平行。若兩者方向相同，即 $\cos\theta>0$ 且 $\sin\theta<0$，則 $y\cos\theta-\sin\theta=+2(y-1)$，$x=-1$。若兩者方向相反，即 $\cos\theta<0$ 且 $\sin\theta>0$，則 $x=1$。兩種情況下都有

$$x=\pm 1,\qquad \tan\theta=\frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

這兩種情況其實是同一回事：把 x 換成 $-x$、θ 換成 $\theta+\pi$，y 的值不變。

驗算

- 當 $x=1$ 時，公式為 $y=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$。取第二象限（quadrant）中滿足 $\tan\theta=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-4)\approx -0.4514$ 的 θ，得 $\theta\approx 2.7176$，於是 $y\approx 2.21525$，與 $\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})\approx 2.21525$ 吻合。
- 用電腦隨機抽取大量實數 x 和 θ，所得 y 值都落在 0.45142 與 2.21524 之間，剛好在界限 $\frac{1}{3}(4\mp\sqrt{7})\approx 0.451416$ 和 2.215250 之內。
- 一個值得留意的巧合：$\tan\theta=-\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$ 正是下界的相反數，因為兩個界互為倒數（reciprocal）（它們的積是 $\frac{1}{9}(16-7)=1$）。

常見錯誤

- 忘記 $y=1$ 的情況：此時關於 x 的方程不是二次方程，判別式的論證不能直接套用。
- 取 $\sqrt{y^2+1}=-2(y-1)$，或沒有檢查正負號：這裏取正根之所以正確，只是因為 $y>1$。
- 只給出一個 x 值；其實 $x=1$ 和 $x=-1$ 都會出現，對應的 θ 位於不同象限。

STEP 之外

步驟 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2\leq(y^2+1)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$ 是柯西－施瓦茨不等式 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ 的二維情況，等號恰好在兩向量平行時成立。這個不等式在所有內積空間（inner-

product space）中都成立，是大學一年級分析（analysis）與線性代數（linear algebra）中最常用的工具之一。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）從幾何角度發展這個不等式；Abbott 的 *Understanding Analysis*（理解分析）則展示它在分析中的應用。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。