詳細解答

STEP II 2016，第 3 題

純數學 • 多項式的根

> **STEP II 2016，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q3

關鍵思路

整道題建基於一條恆等式（identity）：$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$。配合第 (i) 部分，它告訴我們：在 f_n 的根（root）a 處，斜率（gradient）為 $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$。因此，即使不知道根是甚麼，我們也知道每個根處的斜率。由於所有根的正負號相同，這些斜率的正負號亦全部相同；而一條曲線不可能連續兩次向上穿過坐標軸，中間卻沒有一次向下穿過。

解答

全題中記 $\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$。

第 (i) 部分

逐項微分（differentiating term by term），常數項 1 消失，而對 $1 \le k \le n$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

所以

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

得證。

第 (ii) 部分

若 $x \geq 0$，則 $\mathrm{f}_n(x)$ 的每一項都非負，而首項是 1，所以 $\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$。因此沒有根能滿足 $a \geq 0$，任何實根都有 $a < 0$。（當 $n = 0$ 時，$\mathrm{f}_0 = 1$ 根本沒有根，與此一致。）

第 (iii) 部分

由定義，$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$。若 $\mathrm{f}_n(a) = 0$，則由第 (i) 部分，

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

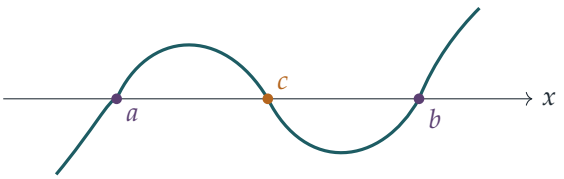
同理 $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$。因此

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

這是因為由第 (ii) 部分得 $a < 0$ 及 $b < 0$，所以 $ab > 0$。這正是所求的不等式。特別地，兩個斜率都不為零，而且正負號相同。

想一想 為甚麼兩個斜率正負號相同，就迫使兩者之間必有另一個根？

設 $a < b$，並假設兩個斜率皆為正（負的情況與之對稱）。由於 $\mathrm{f}_n'(a) > 0$，曲線在 a 處向上穿過坐標軸，所以當 x 略大於 a 時 $\mathrm{f}_n(x) > 0$。由於 $\mathrm{f}_n'(b) > 0$，曲線在 b 處亦向上穿過坐標軸，所以當 x 略小於 b 時 $\mathrm{f}_n(x) < 0$。一個連續函數若在某點為正、在較後的一點為負，則必在兩者之間取值零（介值定理（intermediate value theorem）），所以存在某個 c 滿足 $a < c < b$ 且 $\mathrm{f}_n(c) = 0$。



曲線上升穿過 a，又上升穿過 b，所以在兩者之間某處必定向下穿過坐標軸。

*最多只有一個實根。*假設 $(*)$ 有兩個或以上相異的實根。它是 n 次多項式（polynomial），所以只有有限個根，我們可以從中選出兩個*相鄰*（consecutive）的根 $a < b$，即兩者之間嚴格地沒有其他根。但上面的論證在 a 與 b 之間嚴格地找到一個根 c，矛盾。所以 $(*)$ 最多只有一個實根。（論證按題目所設使用了 $n \geq 2$；當 $n = 1$ 時唯一的根是 -1，當 $n = 0$ 時沒有根，所以結論對每個 n 都成立。）

*n 爲奇數。*此時 f_n 的次數為奇數，首項係數（leading coefficient）$1/n!$ 為正，所以當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$，當 $x \to +\infty$ 時 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$。由介值定理，它最少有一個實根，因此**恰好有一個**。

n 爲偶數。當 $n = 0$ 時沒有根。對偶數 $n \geq 2$，當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$，所以 f_n 在某點 x_0 取得全域最小值（global minimum），而該處 $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$。由於 $\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$，故 $x_0 \neq 0$，於是

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

因為 n 是偶數。最小值為正，所以對所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) > 0$，$(*)$ **沒有實根**。

（另一方法：由於 $\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$，任何根 a 都會是單根（simple root），所以 f_n 在該處會變號；但一個首項係數為正的偶次多項式若恰好只變號一次，則它對所有很大的 x 或對所有很負的 x 必為負，這是不可能的。）

驗算

- $n = 1$：$1 + x = 0$ 只有一個根 -1。$n = 2$：$1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\big((x+1)^2 + 1\big) > 0$，沒有根。兩者皆吻合。
- $n = 3$：根約為 -1.596，而該處 $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$，與預測相符。
- 用電腦檢查 f_n 對每個 $n \leq 25$ 的變號情況，發現 n 為奇數時恰有一個根，n 為偶數時沒有根。

常見錯誤

- 證明斜率之積為正時，沒有說明爲甚麼 $ab > 0$：這需要用到第 (ii) 部分。
- 由「任意兩根之間必有一根」推出「最多只有一個根」，卻沒有選取兩個相鄰的根；正是這個選取才導致矛盾。
- n 為偶數時，忘記檢查 $x_0 \neq 0$，而這是 $x_0^n/n! > 0$ 嚴格成立所必需的。

STEP 之外

多項式 f_n 是 e^x 的泰勒多項式（Taylor polynomials），而第 (i) 部分正是 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ 在有限情況下的影子。由於 e^x 永不為零，f_n 只有很少實根也就順理成章；它們的複數根（complex roots）按 $1/n$ 縮放後，當 $n \to \infty$ 時會聚集在一條稱為塞格曲線（Szegő curve）的曲線上。這裏用到的工具——介值定理，以及連續函數必有最小值——會在第一門分析（analysis）課程中嚴謹地證明；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。