詳細解答

STEP II 2016，第 2 題

純數學 • 因式定理

> **STEP II 2016，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

關鍵思路

把 $(*)$ 看成以 c 為變量的多項式（polynomial），其係數（coefficients）恰好涉及 a 和 b。因式定理（factor theorem）指出：$c-(a+b)$ 是因式（factor），當且僅當代入 $c=a+b$ 後結果為零。一旦找到一個因式，$(*)$ 對 a、b、c 的對稱性（symmetry）便免費送上另外兩個，再數一數次數（degree），因式分解（factorisation）就完成了。之後的兩條方程其實是經過偽裝的特殊情況：要做的就是選取 a、b、c（以及後來的 d、e）來配合它們。

解答

因式 $a+b-c$

記 $(*)$ 為 $F(a,b,c)$。視之為 c 的多項式，F 有因式 $c-(a+b)$（因而亦有因式 $a+b-c$），當且僅當 $F(a,b,a+b)=0$。設 $p=a+b$ 及 $c=p$。那麼 $a+b+c=2p$，並利用 $a^2+b^2=p^2-2ab$ 和 $a^3+b^3=p^3-3abp$，得

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

所以

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

因此 $a+b-c$ 是 $(*)$ 的因式，正如所求。

將 $(*)$ 完全因式分解

無論怎樣重新排列 a、b、c，F 都不變。交換 b 與 c，因式 $a+b-c$ 變成 $a+c-b$；交換 a 與 c，它變成 $b+c-a$。所以以下三者

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

都是因式。它們是互不相同的線性（linear）多項式，沒有一個是另一個的常數倍，所以它們的乘積整除 F。F 的每一項次數都是 3，所以餘下的因式次數為 0：它是一個常數 k，而

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

為求 k，設 $a=b=c=1$：左方為 $27-6\cdot3\cdot3+8\cdot3=-3$，而乘積為 1。因此 $k=-3$，且

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) + 8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

第 (i) 部分

把方程的中間項和最後一項除開，化成 $(*)$ 的形式：

$$(x+1)^3 - 6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right) + 8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right) = 0.$$

想一想 a、b、c 取甚麼值，才能令這式子恰好就是 $(*)$？

試取 $a=x$，而 b、c 為常數。我們需要

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

由前兩式得 $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$，所以 $bc=-\tfrac{3}{4}$。於是

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

所以第三個條件自動成立。現在 b、c 是 $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$ 的根，即 $(2t-3)(2t+1)=0$，所以 $b=\tfrac{3}{2}$，$c=-\tfrac{1}{2}$。

取 $a=x$、$b=\tfrac{3}{2}$、$c=-\tfrac{1}{2}$，因式分解給出

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

所以方程為 $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$，而

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

第 (ii) 部分

記該四變量表達式為 $G(a,b,d,e)$。(設 $c=d+e$，則 $a+b-d-e$ 看起來就像 $a+b-c$，由此可猜到這個因式；不過直接驗證也一樣快。) 根據因式定理，把 G 視為 e 的多項式，只需證明當 $a+b=d+e$ 時 $G=0$。設 $p=a+b=d+e$。與之前完全一樣，$a^2+b^2=p^2-2ab$、$d^2+e^2=p^2-2de$、$a^3+b^3=p^3-3abp$ 及 $d^3+e^3=p^3-3dep$，所以設 $q=ab+de$，得

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3-6(2p)(2p^2-2q)+8(2p^3-3pq)\\ &= 8p^3-24p^3+24pq+16p^3-24pq=0. \end{aligned}$$

所以 $a+b-d-e$ 是 G 的因式。

無論怎樣重新排列 a、b、d、e，G 都不變。因式 $a+b-d-e$ 來自把四個字母分成 $\{a,b\}$ 和 $\{d,e\}$ 兩對；另外兩種配對方法給出因式

$$a+d-b-e \quad (\text{交換}b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{交換}b,e).$$

這三個線性因式互不相同，沒有一個是另一個的倍數，而 G 是 3 次齊次 (homogeneous) 多項式，所以對某常數 k，有 $G=k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$。設 $a=1$、$b=d=e=0$，左方得 $1-6+8=3$，右方得 k，所以

$$G=3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

至於方程，取 $a=x$，並取常數 b、d、e 使得

$$b+d+e=6, \qquad b^2+d^2+e^2=14, \qquad b^3+d^3+e^3=36.$$

數字 1、2、3 符合要求：$1+2+3=6$，$1+4+9=14$，$1+8+27=36$。所以取 $a=x$、$b=1$、$d=2$、$e=3$，方程恰好就是 $G=0$，其因式分解為

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2)=3(x-4)(x-2)x=0.$$

因此

$$x=0, \quad x=2, \quad x=4.$$

驗算

- 把 $a=b=1$、$c=2$ 代入 $(*)$：$64-6\cdot4\cdot6+8\cdot10=0$，正如因式 $a+b-c$ 所預示。
- 在 (i) 中，$x=1$ 給出 $8-3\cdot2\cdot7+2\cdot17=8-42+34=0$。
- 在 (ii) 中，$x=0$ 給出 $216-6\cdot6\cdot14+8\cdot36=216-504+288=0$，而 $x=4$ 給出 $1000-6\cdot10\cdot30+8\cdot100=0$。
- 這些因式分解亦已用電腦在變量取幾千個隨機有理數值時驗證過。

常見錯誤

- 忘記常數：$(*)$ 是各因式乘積的 -3 倍，而不是乘積本身。務必用方便的代入來確定 k。
- 在 (ii) 中列出多於三個因式。例如交換 a 與 d，得到 $d+b-a-e$，這不過是 $-(a+e-b-d)$；三個真正不同的因式來自把四個字母兩兩配對的三種方法。
- 用蠻力把所有東西展開。這樣做行得通，但又長又容易出錯；把方程與恆等式配對才是這道題的重點。

STEP 之外

因式定理在任何域（field）上都成立；這裏我們把除一個以外的所有變量視為常數，從而把它用於多變量多項式。對稱性加上多項式的唯一因式分解（unique factorisation）是威力強大的組合：對稱多項式（symmetric polynomials）的理論指出，每個對稱多項式都可以用基本對稱多項式（elementary symmetric polynomials）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 表示，這正是 (i) 中關於 b、c 的條件背後隱藏的結構。順帶一提，乘積 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 正是三角形面積的海倫公式（Heron's formula）中出現的式子。想進一步了解多項式環（polynomial rings）與因式分解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。