詳細解答

STEP II 2016，第 13 題

概率與統計 • 正態近似

> **STEP II 2016，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 12.23 節由概率得出斯特靈公式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/stirling-probability.html

關鍵思路

離散分佈（discrete distribution）的單一概率 $\mathrm{P}(X = k)$，是一條以 k 為中心、寬度為 1 的長條的面積。若該分佈接近正態分佈（normal distribution），這個面積大約等於 k 處的正態概率密度（density）乘以寬度 1。在平均值（mean）處應用這一點（標準正態分佈在該處的密度為 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$），便能把一個已知的精確概率化為一個近似式。只要巧妙地選取分佈，就能令精確概率包含我們想要的階乘（factorial）。

解答

全題通用的近似

設 W 取整數值，平均值為 μ，方差（variance）為 σ^2，並且可用 $V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 很好地近似。V 的概率密度為

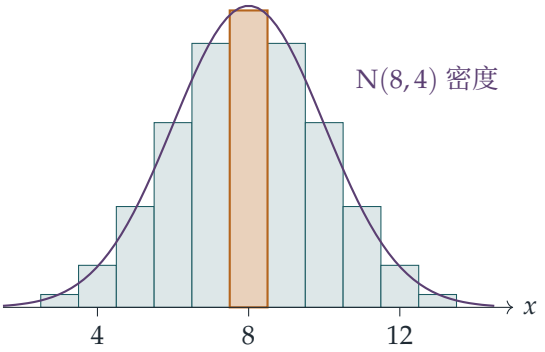
$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

加上連續性校正（continuity correction），

$$\mathrm{P}(W = k) \approx \mathrm{P}\left(k - \tfrac{1}{2} < V < k + \tfrac{1}{2}\right) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} f(v)\,\mathrm{d}v \approx 1 \times f(k),$$

最後一步成立，是因為區間寬度為 1，而當 σ 不太小時，f 在區間上幾乎不變。在 $k=\mu$ 處，指數部分為 $\mathrm{e}^0=1$，所以

$$\mathrm{P}(W=\mu)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (*)$$



第 (i) 部分

對於 $X\sim\mathrm{B}(16,\frac{1}{2})$，

$$\mathrm{E}(X)=np=8,\qquad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=4,$$

所以 $\sigma=2$。由於 $p=\frac{1}{2}$，分佈關於 8 對稱，而且 n 相當大，因此 $\mathrm{N}(8,4)$ 是很好的近似（圖中把各長條與正態曲線作了比較）。由 $(*)$，陰影長條的面積為

$$\mathrm{P}(X=8)\approx\frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

設 $Y\sim\mathrm{B}(2n,\frac{1}{2})$。則 $\mathrm{E}(Y)=n$，$\mathrm{Var}(Y)=2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，所以 $\sigma=\sqrt{n/2}$。精確地，

$$\mathrm{P}(Y=n)=\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}}.$$

當 n 很大時，正態近似適用，由 $(*)$ 得

$$\mathrm{P}(Y=n)\approx\frac{1}{\sqrt{n/2}\,\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

令兩個表達式相等，再乘以 $2^{2n}(n!)^2$：

$$(2n)!\approx\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}},$$

這正是所求的結果。（第 (i) 部分就是 $n=8$ 的情況：$\sqrt{8\pi}=2\sqrt{2\pi}$。）

第 (iii) 部分

設 $Z \sim \mathrm{Po}(n)$，於是 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{Var}(Z) = n$，$\sigma = \sqrt{n}$。精確地，

$$\mathrm{P}(Z = n) = \frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!}.$$

? **想一想** 為甚麼這裏可以用正態分佈來近似泊松分佈（Poisson distribution）？

一個 $\mathrm{Po}(n)$ 隨機變量與 n 個獨立的 $\mathrm{Po}(1)$ 隨機變量之和同分佈，所以由中心極限定理（central limit theorem），當 n 很大時，它近似服從 $\mathrm{N}(n, n)$。這就是「當 λ 很大時 $\mathrm{Po}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda)$」這條標準法則。

因此由 $(*)$，

$$\frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

整理後得

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n}\, n^n,$$

即為所求。

驗算

- 第 (i) 部分：精確值為 $\mathrm{P}(X = 8) = \binom{16}{8}/2^{16} = 12870/65536 \approx 0.1964$，而 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995$，相差約 1.6% 以內。
- 第 (ii) 部分取 $n = 10$：$\binom{20}{10}/2^{20} \approx 0.1762$，對比 $1/\sqrt{10\pi} \approx 0.1784$。隨着 n 增大，階乘近似式兩邊之比趨向 1（在 $n = 100$ 時約為 0.9988）。
- 第 (iii) 部分取 $n = 10$：$10! = 3\,628\,800$，而 $\sqrt{20\pi}\,\mathrm{e}^{-10}\,10^{10} \approx 3\,598\,696$，偏小不足 1%。
- 一致性：把 (iii) 的結果同時代入 (ii) 中的 $(2n)!$ 和 $n!$，兩邊都得到 $\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}$，所以兩個近似式互相吻合。

常見錯誤

- 直接使用標準正態密度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 而沒有除以 σ。$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 在平均值處的密度是 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。
- 在第 (ii) 部分中把標準差（standard deviation）誤用為 $\frac{n}{2}$ 而不是 $\sqrt{n/2}$，或把 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ 的方差算錯。
- 在第 (iii) 部分中忘記說明為甚麼泊松分佈可以用正態分佈近似。

STEP 之外

第 (iii) 部分的結果就是斯特林公式（Stirling's formula），而上述論證是中心極限定理在單一點上應用的一種啟發式（heuristic）形式，即所謂「局部極限定理」（local limit theorem）。要把它嚴格化需要小心：知道一個分佈函數接近正態分佈函數，本身並不能推出個別概率接近密度。斯特林公式也可以直接證明，例如把 $\ln n! = \sum \ln k$ 與 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ 作比較，或從伽瑪函數(gamma function)出發，運用拉普拉斯(Laplace)方法。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）講解了中心極限定理及泊松分佈與正態分佈之間的聯繫；Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率入門》）是很好的輔助讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。