詳細解答

STEP II 2016，第 12 題

概率與統計 • 容斥原理與錯排

STEP II 2016，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s2-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 9.8 節沒有人拿到自己的恤衫中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/derangements.html

關鍵思路

對於三個事件（event），把 $A \cup B$ 看作單一事件，然後兩次運用兩個事件的公式。同樣的正負交替規律（加上單個事件、減去兩兩之交、加上三個之交，...）對任意數目的事件都成立。把這規律應用於「第 i 張卡在第 i 個位置」這些事件時，每個由 r 個事件組成的項都有相同的概率，所以和式的每一層都會化簡成一個分數。至於「恰好一個」，先固定哪一張卡是配對的那張，再要求其餘的卡完全沒有配對。

解答

三個事件

寫成 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$，然後以 $A \cup B$ 代替 A、以 C 代替 B，運用兩個事件的公式：

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big).$$

第一項是 $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$。至於最後一項，由分配律（distributive law）得 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，再運用一次兩個事件的公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

把兩者代入，

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C),$$

得證。

四個事件

加上四個單一事件的概率，減去六個兩兩交集（intersection）的概率，加上四個三重交集的概率，再減去四重交集的概率：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C\cup D)=\ &\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap D)\\&-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(B\cap D)-\mathrm{P}(C\cap D)\\&+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap D)+\mathrm{P}(A\cap C\cap D)+\mathrm{P}(B\cap C\cap D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D).\end{aligned}$$

第 (i)–(iii) 部分

全部 $n!$ 種排列的可能性相等。若要求某 r 張指定的卡各自在自己的位置上，餘下的 $n-r$ 張卡可以有 $(n-r)!$ 種排法，所以概率是 $(n-r)!/n!$。因此

$$\text{(i) }\mathrm{P}(E_i)=\frac{1}{n},\qquad \text{(ii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j)=\frac{1}{n(n-1)},\qquad \text{(iii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

（第 (ii) 部分亦可這樣看：第 i 張卡落在第 i 個位置的概率是 $\frac{1}{n}$，然後第 j 張卡在餘下的 $n-1$ 個位置中落在第 j 個位置的概率是 $\frac{1}{n-1}$。）

至少一個配對

至少有一張卡配對，正正就是 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ 發生。上述規律可推廣至 n 個事件：第 r 層是 $(-1)^{r+1}$ 乘以所有由 r 個不同事件組成的交集的概率之和。

> ? **想一想** 在不知道是哪些事件的情況下，怎樣計算一個遍及所有 r 個事件選法的和？

由對稱性（symmetry），每個由 r 個不同事件組成的交集都有相同的概率 $(n-r)!/n!$，而選出 r 個事件的方法有 $\binom{n}{r}$ 種。所以第 r 層貢獻

$$(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=(-1)^{r+1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}.$$

對 $r=1,2,\ldots,n$ 求和，

$$\mathrm{P}(\text{至少一個配對})=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

得證。（當 $r = 1, 2, 3$ 時，這不過是第 (i)–(iii) 部分得出的 $n \cdot \frac{1}{n}$、$\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}$ 和 $\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$。）

恰好一個配對

以 p_m 表示 m 張洗亂了的卡中沒有任何一張在自己位置上的概率。由上一個結果，

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m!}.$$

「恰好一個配對」這事件是各事件「第 i 張卡配對而其他卡都不配對」對 i 的不相交併集（disjoint union）。在 E_i 發生的條件下，其餘 $n-1$ 張卡在其餘 $n-1$ 個位置上的任何排列都有相等的可能性，所以這等同於重新洗一副 $n-1$ 張的卡，而其中沒有任何一張配對的概率是 p_{n-1}。因此

$$\mathrm{P}(\text{恰好一個配對}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_i)\, p_{n-1} = n \cdot \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} = p_{n-1},$$

即是

$$\mathrm{P}(\text{恰好一個配對}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2),$$

而當 $n = 1$ 時概率為 1。等價地，它等於 $\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r/r!$，這個寫法連 $n = 1$ 的情況也包括在內。

驗算

當 $n = 3$ 時，排列有 123、132、213、231、312、321。其中四個有配對，得 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$；而三個（即對換 132、213、321）恰好有一個配對，得 $\frac{1}{2}$，與公式相符。當 $n = 2$ 時，恰好一個配對是不可能的（若一張卡在其位置上，另一張也必然如此），而公式給出 0。以電腦列舉 $n \leq 7$ 的所有排列，結果與兩條公式都相符；例如當 $n = 7$ 時，恰好一個配對的概率是 $\frac{53}{144} \approx 0.368$。當 $n \to \infty$ 時，兩個答案都趨向熟悉的極限：至少一個配對趨向 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632$，而恰好一個配對趨向 e^{-1}。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{1}{n^2}$：這些事件並不獨立（independent），因為一旦第 i 張卡在第 i 個位置，第 j 張卡便只剩下 $n-1$ 個位置。
- 把「恰好一個」答成 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ 或 $\mathrm{P}(E_1)$：我們需要第 i 張卡在其位置上，*而且*沒有其他卡在其位置上。
- 忘記「至少一個」的和式中 $r = 1$ 的項是 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$，這正是級數以 1 開始的原因。

STEP 之外

這是經典的錯排（derangement）問題（即 *problème des rencontres*，「配對問題」），而一般的容斥（inclusion–exclusion）公式可以用歸納法（induction）或指示隨機變量（indicator random variables）簡潔地證明。原來當 n 很大時，配對的數目近似服從平均值為 1 的泊松分佈（Poisson distribution）：恰好有 k 個配對的概率趨向 $\mathrm{e}^{-1}/k!$。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》），以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》），都有討論容斥原理和配對問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。