詳細解答

STEP II 2016，第 11 題

力學 • 拋體的碰撞

> **STEP II 2016，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q11

關鍵思路

兩個質點碰撞（collide），即是在同一時刻兩個坐標都相等，因此我們得到兩條共用同一個未知數 t 的方程；把其中一條除以另一條，便可消去 t。第 (ii) 部分的竅門在於留意到：在每一瞬間，重力把子彈和靶子往下拉的距離完全相同，都是 $\frac{1}{2}gt^2$。所以兩者能否相遇，取決於第 (i) 部分那種沒有重力的運動；重力只在問「相遇時靶子在哪裏」時才有關係。

解答

第 (i) 部分

把第一個質點記作 P（從 $(a,0)$ 出發），第二個記作 Q（從 $(0,b)$ 出發）。設兩者在時刻 t 碰撞。令 x 坐標和 y 坐標分別相等，

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, && \text{所以} \quad t(v\cos\beta - u\cos\alpha) = a, \\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, && \text{所以} \quad t(u\sin\alpha - v\sin\beta) = b. \end{aligned}$$

由於 $a > 0$，第一條方程顯示 $t \neq 0$（兩個質點從不同的點出發），因此 $t > 0$，我們可以把第二條方程除以第一條：

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

（分母等於 $a/t \neq 0$。）交叉相乘，

$$\cos\theta\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) = \sin\theta\,(v\cos\beta - u\cos\alpha),$$

再把含 u 的項移到左邊、含 v 的項移到右邊，

$$u(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=v(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta).$$

由 $\sin(A+B)$ 的複角公式（compound-angle formula），上式即是

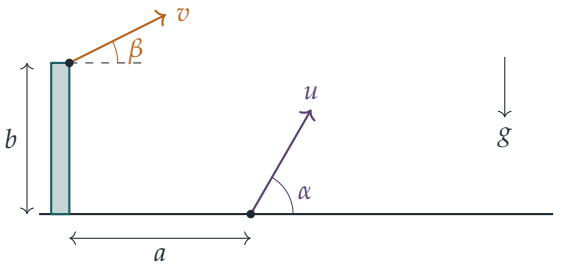
$$u\sin(\theta+\alpha)=v\sin(\theta+\beta),$$

此即所求。我們另外記下兩個稍後會用到的事實：由於 $a,b,t>0$，

$$v\cos\beta>u\cos\alpha \qquad 及 \qquad u\sin\alpha>v\sin\beta. \tag{$*$}$$

第 (ii) 部分

把子彈和靶子視為只受重力作用、自由運動的質點，不計空氣阻力（air resistance）。取塔底為原點，x 軸為通過靶子發射點的水平線（方向為遠離塔的一方），y 軸鉛直向上。子彈必須朝靶子的方向發射才有可能命中，所以兩者都在這個鉛直平面內運動。



在時刻 t（兩者落地之前），靶子和子彈的位置分別是

$$T=(a+ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2), \qquad B=(vt\cos\beta,\ b+vt\sin\beta-\tfrac{1}{2}gt^2).$$

這恰好是第 (i) 部分中的位置，各自向下平移了相同的距離 $\frac{1}{2}gt^2$。

? **想一想** 第 (i) 部分沒有重力，為甚麼我們仍可以用第 (i) 部分的結果？

命中發生在 $T=B$ 的時候。在 y 方程中，$-\frac{1}{2}gt^2$ 這一項同時出現在兩邊，可以互相抵消，所以碰撞條件與第 (i) 部分一字不差：

$$t(v\cos\beta-u\cos\alpha)=a, \qquad t(u\sin\alpha-v\sin\beta)=b.$$

特別地，第 (i) 部分及 $(*)$ 都適用，而命中的時刻是

$$t=\frac{b}{u\sin\alpha-v\sin\beta},$$

其中由 $(*)$ 知分母為正。

此刻靶子仍在空中，當且僅當它的高度為正：

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

這裏除以了 $\frac{1}{2}t > 0$。代入命中的時刻，

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

兩個分母都是正數，所以兩邊同乘 $g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$ 不會改變不等式（inequality）的方向，於是得到

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

此即所求。（命中時子彈與靶子處於同一高度，所以子彈也在地面之上。）

為甚麼需要 $\alpha > \beta$

我們已經看到，要命中，兩個質點必須按第 (i) 部分的意義碰撞，所以

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

其中 $\tan\theta = b/a$；而且由 $(*)$，還有 $u\sin\alpha > v\sin\beta$。這裏四個正弦值都是正數，因為 θ、α、β 都是銳角，所以 $\theta+\alpha$ 和 $\theta+\beta$ 嚴格介乎 0 與 π 之間。把等式除以這個不等式，不等號方向會倒轉：

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

展開得 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$，$\beta$ 的情況同理，所以

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

因為 $\sin\theta > 0$。在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上餘切函數（cotangent）嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $\alpha > \beta$。

從物理角度看：相對於子彈，靶子以恆定速度沿直線運動，因為重力已經抵消了。這個相對速度（relative velocity）必須由靶子的起點 $(a, 0)$ 指向位於 $(0, b)$ 的槍，所以它必須指向後方及上方；由 $(*)$，靶子在水平方向必須比子彈慢，在鉛直方向卻比子彈快，這迫使它的路徑較陡，即 $\tan\alpha > \tan\beta$。（把 $(*)$ 的兩部分相除，也可以直接得到同一結論。）

驗算

試取 $u = 20$、$\alpha = 60°$、$v = 15$、$\beta = 30°$，並設在 $t = 1$ 時命中，$g = 9.8$。碰撞方程給出 $a \approx 2.990$ 及 $b \approx 9.821$，所以 $\theta \approx 73.06°$。於是 $u\sin(\theta+\alpha) \approx 14.612$，而

$v\sin(\theta+\beta) \approx 14.612$，兩者吻合。命中時靶子的高度為 $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$，而確實 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$。我們用電腦檢驗了數以千計的隨機發射情況，證實該不等式成立當且僅當命中時靶子仍在空中，而且每一次命中都有 $\alpha > \beta$。

常見錯誤

- 忘記兩個質點必須在同一時刻處於同一位置，結果解出兩個不同的時刻。
- 未先確定 $u\sin\alpha - v\sin\beta$ 為正，便把兩邊同乘以它；它確實為正，因為 $t > 0$ 且 $b > 0$。
- 單憑 $u\sin\alpha > v\sin\beta$ 推出 $\alpha > \beta$；除非同時比較速率，否則這條不等式對角度毫無啟示。

STEP 之外

重力互相抵消，是伽利略相對性（Galilean relativity）的一個例子：在隨子彈一同自由下落的參考系中，靶子以恆定速度沿直線運動，所以「直接瞄準它」就行。這正是經典的「猴子與獵人」（monkey and hunter）示範實驗；而慣性參考系（inertial frame）（或自由下落參考系）的概念，是大學一年級力學的起點，日後亦是廣義相對論（general relativity）中等效原理（equivalence principle）的起點。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對相對運動和參考系有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。