詳細解答

STEP II 2016，第 10 題

力學 • 摩擦力與平衡

> **STEP II 2016，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q10

關鍵思路

作用在三角形上的只有兩個力：作用於質心（centre of mass）G 的重量，以及釘在接觸點 P 給予的單一接觸力（contact force）。兩個力處於平衡（equilibrium）時，必須大小相等、方向相反，並且作用在同一直線上，所以三角形會擺動，直至 G 位於 P 的正下方。於是問題變成：釘的反作用力要偏離 BC 的法線多少，而摩擦力（friction）是否足以承受？因此第一步是找出 G 的位置。

解答

模型與質心

把金屬線視為三根單位長度質量相同的均勻桿（uniform rod），並把釘視為單一接觸點，提供一個法向反作用力（normal reaction）R（垂直於 BC）和一個摩擦力 F（沿 BC），且 $F \le \mu R$。

設 $AB = AC = b$，並設 M 為 BC 的中點。由於 A 處的角是 2θ，直線 AM 平分此角並垂直於 BC，所以

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

由對稱性，G 位於 AM 上。從 BC 向 A 的方向量度距離。桿 AB 和 AC 的質量各與 b 成正比，其中心位於各自的中點，與 BC 的距離為 $\frac{1}{2}b\cos\theta$；桿 BC 的質量與 $2b\sin\theta$ 成正比，其中心位於 BC 上。所以距離 $d = GM$ 為

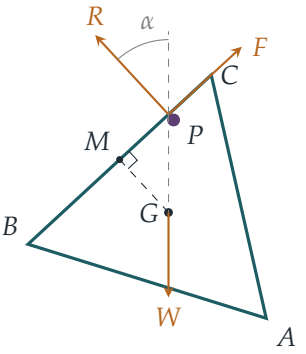
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

釘位於一般位置時的平衡

假設釘在 P 點接觸 BC，其中 $MP = x$，且 $0 \le x \le b\sin\theta$（由對稱性，可取 P 位於 M 與 C 之間）。三角形懸掛在釘的下方，所以釘位於三角形內部，而 BC 擱在釘上。

想一想 三角形可以以任何角度懸掛。我們怎樣知道它會取哪一個角度？

作用在三角形上的力是作用於 G 的重量 W，以及釘在 P 的總接觸力。只有兩個力時，平衡要求它們大小相等、方向相反（所以接觸力是鉛直向上的 W），並且作用在同一直線上（否則它們會構成一個力偶（couple））。所以 PG 必須是鉛直的：三角形會穩定在 G 位於 P 正下方的位置。



設 α 為 PG（鉛直線）與 BC 的法線 GM 之間的夾角。在直角三角形 PMG 中，

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC 的法線與鉛直線成 α 角，而 BC 與水平線成 α 角。沿垂直於 BC 及沿 BC 的方向分解（resolve）：

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

由於 $0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$，兩者皆非負，且 $R > 0$。只要 $F \le \mu R$，三角形便能保持不動而不滑動，即

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC 上的每一點

右方的 x/d 隨 x 遞增，所以當 P 位於端點，即 $x = b\sin\theta$ 時，條件最難滿足。當且僅當在該處可以平衡時，在 BC 上每一點都可以平衡：

$$\mu \ge \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

這就是所求的條件。若此條件成立，則對 $[0, b\sin\theta]$ 中每一個 x 都有 $\mu \ge x/d$，所以無論釘位於 BC 上哪一點，三角形都可以靜止。

驗算

- 當 $x = 0$（釘位於 M）時，得 $\alpha = 0$：三角形懸掛時 BC 保持水平，完全不需要摩擦力，正如對稱性所預期。
- 當 $\theta = 30^\circ$ 時，三角形是等邊三角形，$d = \frac{1}{3}b\cos 30^\circ$，而 G 應為形心（centroid），即從 BC 沿高 $b\cos 30^\circ$ 向上三分之一處。結果確實如此。條件變成 $\mu \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$：在角位時，$BC$ 須與水平線成 60°。
- 當 $\theta \to 0$ 時，三角形變成一根細長的尖刺，BC 縮小至零，界限趨於 0；當 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$ 時，三角形變成一條又長又扁的窄條，界限趨於無窮大。兩者都符合直覺。
- 以電腦驗算：把三根桿分割成許多小段來求 G，並對隨機的 θ 和 b 在 BC 上 201 個點分解力，結果與 $2\tan\theta(1+\sin\theta)$ 的差在 10^{-11} 以內。

常見錯誤

- 用了三角形薄板（lamina）的形心（AM 向上三分之一處），而不是金屬線的質心。金屬線框的質量分佈在三邊上，所以 BC 的權重是 $2b\sin\theta$。
- 假設 BC 保持水平，然後嘗試取力矩。三角形會傾斜，直至 G 位於釘的下方；摩擦力要應付的正是這個傾斜角。
- 只檢查 BC 上的一點。最壞的情況在 BC 的端點，而正是這一點決定了界限。

STEP 之外

寫出 $\tan\alpha \leq \mu$，即表示總接觸力必須位於摩擦錐（cone of friction）之內，這是一個以法線為軸、半頂角為 $\arctan\mu$ 的圓錐。這個圖像令許多摩擦問題（梯子、楔子、粗糙的釘）幾乎變成幾何問題，並且可以推廣至有多個接觸點的剛體（rigid body）：問題變成能否在每個錐內選取某些力，使之與負載平衡。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便以這種嚴謹的態度處理摩擦與剛體平衡。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。