詳細解答

STEP II 2016，第 1 題

純數學 • 參數曲線與切線

> **STEP II 2016，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q1

關鍵思路

用參數（parameter）而不是坐標來處理。O 處的直角會變成兩點的參數 p 和 q 之間一條非常簡單的關係，而一般點上的切線（tangent）用 t 表示時有一條簡潔的方程。求出兩條切線的交點後，交點的坐標會是 p 和 q 的對稱函數（symmetric function），而 p 與 q 之間的關係正好足以把它們消去（eliminate）。

解答

一般點上的切線

在參數為 t 的點上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

所以 (t^2, t^3) 處的切線是 $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$，即

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

（當 $t = 0$ 時，這給出 $y = 0$，即尖點（cusp）處的切線，但我們不需要用到該點。）

直角

設 $P = (p^2, p^3)$ 及 $Q = (q^2, q^3)$。要令 $\angle POQ$ 有意義，兩點都不能是 O，所以 $p \neq 0$ 且 $q \neq 0$。該角為直角當且僅當 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$：

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1 + pq) = 0.$$

由於 $p^2q^2 \neq 0$，這迫使

$$pq = -1.$$

特別地，$p \neq q$（它們的積是負數），所以 P 和 Q 處的切線斜率（gradient）不同，$\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$，確實相交於唯一一點。

切線的交點

把 $(*)$ 分別取 $t = p$ 和 $t = q$ 的兩個版本相減：

$$3(p-q)x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

除以 $p - q \neq 0$，並利用 $pq = -1$，

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

代回 $t = p$ 時的 $(*)$：

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2+pq+q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p+q) = -(p+q). \end{aligned}$$

> **想一想** 我們已用兩個參數表示 x 和 y。怎樣才能得到一條只含 x 和 y 的方程？

把 y 平方：出現的交叉項 $2pq$ 是已知常數，剩下的是 $p^2 + q^2$，而這正是 $3x$ 所含的部分。事實上，

$$4y^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + q^2 - 2 = (3x+1) - 2 = 3x - 1.$$

所以 P 和 Q 處的切線相交於 $C_2\colon 4y^2 = 3x - 1$ 上，得證。

（事實上 C_2 上每一點都會出現：當 p 取遍所有正實數時，$2y = -(p+q) = \frac{1}{p} - p$ 取遍所有實數值，而 x 則由 C_2 的方程確定。）

C_1 與 C_2 是否相交？

把 $x = t^2$、$y = t^3$ 代入 C_2 的方程：

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{其中} u = t^2 \geq 0.$$

顯然 $u = -1$ 是一個根，除去因式 $u + 1$ 得

$$4u^3 - 3u + 1 = (u+1)(4u^2 - 4u + 1) = (u+1)(2u-1)^2.$$

由於 $u \geq 0$，唯一可能是 $u = \frac{1}{2}$，所以 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。因此兩曲線確實相交，而且恰好交於兩點

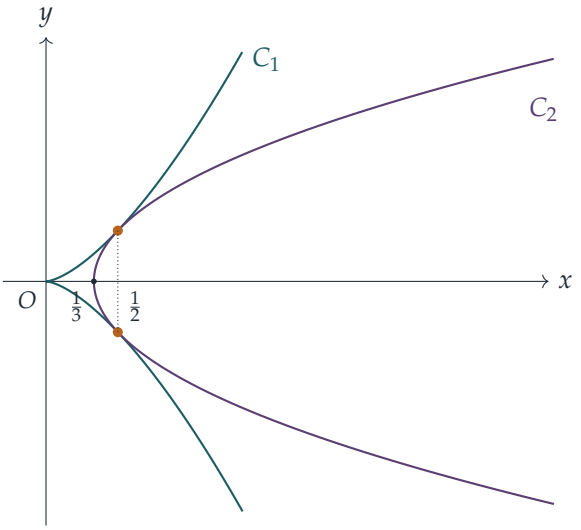
$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{及} \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

重根（repeated root）告訴我們更多：兩曲線在該處相切，而不是相交穿過。我們可以直接驗證。在 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 處，C_1 的斜率是 $\frac{3t}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$。對 $4y^2 = 3x - 1$ 進行隱函數求導（implicit differentiation）得 $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$，所以在 $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 處，C_2 的斜率是 $\frac{3}{8y} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$，兩者相同。由於圖形關於 x 軸對稱，另一點亦然。

由於對 $u \geq 0$ 有 $4u^3 - 3u + 1 = (u+1)(2u-1)^2 \geq 0$，曲線 C_1 永遠不會走進拋物線（parabola）內部：除了兩個切點外，C_2 都位於 C_1 的兩條分支之間。

草圖

C_1 滿足 $y^2 = x^3$：它位於 $x \geq 0$ 的區域，關於 x 軸對稱，並在 O 處有一個尖點（兩條分支的斜率 $\frac{3t}{2} \to 0$，所以它們沿正 x 軸離開 O）。C_2 是拋物線 $x = \frac{1}{3}(4y^2+1)$，頂點（vertex）為 $(\frac{1}{3}, 0)$，開口向右，同樣關於 x 軸對稱。拋物線位於尖點之內、C_1 的兩條分支之間，並在 $x = \frac{1}{2}$ 處與每條分支各相切一次。



驗算

- 取 $p = 1$、$q = -1$：$P = (1,1)$，$Q = (1,-1)$，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - 1 = 0$。切線為 $2y = 3x - 1$ 及 $2y = -3x + 1$，交於 $(\frac{1}{3}, 0)$，即 C_2 的頂點。
- 取 $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$：切線 $2y = 6x - 8$ 與 $2y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$ 交於 $x = \frac{13}{12}$、$y = -\frac{3}{4}$，而 $4y^2 = \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1$。
- 切點 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx (0.5, 0.35355)$ 滿足 $4y^2 = \frac{1}{2} = 3x - 1$，而該處兩條曲線的斜率都是 ≈ 1.06066。用電腦檢驗了 10^5 對滿足 $pq = -1$ 的隨機參數，所有交點在捨入誤差範圍內都落在 C_2 上。

常見錯誤

- 忘記排除 $p = 0$ 或 $q = 0$：在除去因式以得到 $pq = -1$ 之前，必須確定 p^2q^2 不為零。
- 除以 $p - q$ 時沒有說明它為何不為零。
- 停在「$4u^3 - 3u + 1 = 0$ 有根」，而沒有檢查它是否給出 $u = t^2 \geq 0$；根 $u = -1$ 並不對應 C_1 上的任何點。

STEP 之外

曲線 $y^2 = x^3$ 是經典的*尖點三次曲線*（cuspidal cubic），而把一條曲線與一條參數化曲線聯立、再從重根看出相切的技巧，正是代數幾何（algebraic geometry）的起點：相交重數（intersection multiplicity）計算曲線相交了多少次，而貝祖（Bézout）定理指出，一條三次曲線與一條二次曲線（conic）在正確計算重數下相交於六點。這裏的六點是二重根 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$（共四個）和一對複數根 $t = \pm i$。一本淺白的入門書是 Kirwan 的 *Complex Algebraic Curves*（《複代數曲線》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。