詳細解答

# STEP I 2016，第 9 題

力學 • 極限摩擦力平衡

**STEP I 2016，第 9 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q9

## 關鍵思路

對 $A$ 取力矩（moments）：牆上的兩個力因此消去，欄杆處的法向反作用力（normal reaction）可直接以 $\theta$ 表示，完全不涉及摩擦力（friction）。只要知道每個摩擦力的方向，再沿水平和鉛垂方向分解（resolving）便可完成。這正是本題的真正重點：摩擦力與桿即將發生的運動方向相反，所以我們必須判斷端點 $A$ 是即將沿牆向下滑，還是向上滑。

## 解答

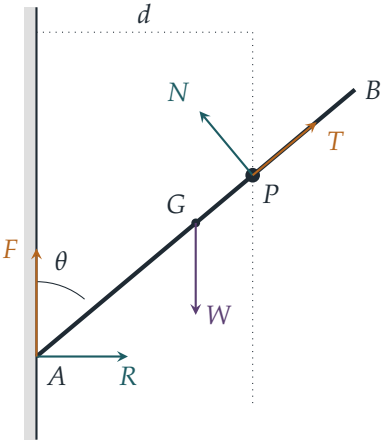
把桿模型化為重 $W$ 的均勻剛性桿（uniform rigid rod），其中心 $G$ 與 $A$ 的距離為 $a$；把欄杆模型化為一條固定直線，與桿只相交於一點 $P$。由於 $A$ 到欄杆的水平距離為 $d$，而桿與鉛垂線成角 $\theta$，

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

條件 $a\sin\theta < d$ 表示 $G$ 位於 $A$ 與 $P$ 之間。

各力如下：

- 在 $A$：法向反作用力 $R$，方向水平並離開牆壁；以及沿牆的摩擦力 $F$；
- 在 $P$：垂直於桿的法向反作用力 $N$；以及沿桿的摩擦力 $T$；
- 作用於 $G$ 的重量 $W$。




圖中 $F$ 和 $T$ 的箭頭方向對應下文的第一種情況。

### 對 $A$ 取力矩

由於 $N$ 垂直於桿，$N$ 對 $A$ 的力矩為 $N \cdot AP$；$T$ 沿桿作用，對 $A$ 沒有力矩，$R$ 和 $F$ 亦然。重量的力臂（lever arm）為 $a\sin\theta$。因此

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

無論桿即將向哪個方向滑動，此式均成立。

### 桿向哪個方向滑動？

**想一想** $A$ 是即將沿牆向下滑，還是向上滑？

先假設完全沒有摩擦力。沿鉛垂方向分解，需要 $N\sin\theta = W$，結合 (1) 即 $a\sin^3\theta = d$。但此處 $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$，故由 (1) 得 $N\sin\theta < W$：單靠法向反作用力無法撐住桿，其餘部分必須由摩擦力提供。桿即將向下滑動：$A$ 沿牆下滑，$\theta$ 減小，$AP = d/\sin\theta$ 增大，於是桿穿過欄杆向牆壁方向滑下。摩擦力阻止這個運動，所以 $F$ 沿牆向上，$T$ 沿桿向上（指向 $B$），如圖所示。在兩個接觸點均處於極限平衡（limiting equilibrium）時，

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

### 分解各力

沿桿向上的單位向量（unit vector）為 $(\sin\theta, \cos\theta)$，而 $N$ 的方向為 $(-\cos\theta, \sin\theta)$（指向牆壁並向上）。沿水平方向分解：

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

（牆壁只能推，故需 $R \geq 0$，所以此情況要求 $\tan\theta \leq 1/\lambda$。）沿鉛垂方向分解：

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

代入 (1) 中的 $N$，再除以 $W\sin^2\theta$，得

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

這就是所求的結果。

**$a\sin\theta > d$ 的情況**

此時 $G$ 位於欄杆之外。方程 (1) 和幾何關係都不變，所以唯一的問題仍然是滑動的方向。

> ? **想一想** $G$ 移到欄杆之外後，有甚麼改變？

上面的論證顯示，當 $a\sin^3\theta < d$ 時桿向下滑，當 $a\sin^3\theta > d$ 時桿向上滑。在 $a\sin\theta < d$ 的條件下只可能出現前者。在 $a\sin\theta > d$ 的條件下，後者變得可能：伸出欄杆之外部分的重量使 $N\sin\theta > W$，於是桿傾向穿過欄杆向遠離牆壁的方向滑下，而 $A$ 沿牆向上移動。這是新的情況，此時兩個摩擦力的方向都相反：$F = \mu R$ 沿牆向下，$T = \lambda N$ 沿桿向下。在上面的推導中把 $\lambda$ 換成 $-\lambda$、$\mu$ 換成 $-\mu$，得

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

再結合 (1)，

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

此時 $R > 0$ 自動成立。（若 $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$，桿仍然即將向下滑，第一個結果照樣適用，因為其推導從未用到 $G$ 的位置。）

## 驗算

- 沒有摩擦力時（$\lambda = \mu = 0$），兩個結果都化為 $d = a\sin^3\theta$，即上文所得的無摩擦平衡。
- 設 $\lambda = \tan\alpha$ 及 $\mu = \tan\beta$（即摩擦角（angle of friction）），右方分別變為 $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ 和 $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$：兩種情況只在摩擦角的正負號上有分別，理應如此。

- 取 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 及 $\theta = \frac{1}{3}\pi$，兩種情況分別給出 $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$ 和 $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$。按上述摩擦力方向，把每個值代回力和力矩的方程，均得合力為零及力矩為零。

## 常見錯誤

- 以為欄杆的法向反作用力是鉛垂的。事實上它垂直於桿，因為桿與欄杆只在一點接觸。
- 在力矩方程中，以長度 $d$ 而非 $d/\sin\theta$ 作為 $A$ 到欄杆的距離。
- 未先想清楚桿實際上會向哪個方向移動，便定下摩擦力的方向。

## STEP 之外

在向下和向上兩個極限情況之間，桿對一整個區間的角度 $\theta$ 都能保持平衡：摩擦力帶來的是一系列平衡狀態，而不是單一個。描述這類集合（每個接觸點的摩擦錐（friction cone），以及各接觸點能夠維持的狀態集合）是接觸力學（contact mechanics）以及機械人抓取分析的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度，仔細講解摩擦力與剛體靜力學（rigid-body statics）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。