詳細解答

STEP I 2016，第 8 題

純數學 • 生成函數

> **STEP I 2016，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 9.4 節把數列看成函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/generating-functions.html

關鍵思路

生成函數（generating function）把整個數列包裝成單一個函數，而對數列的運算就變成對這個函數的代數運算。在第 (i) 部分，$1-x$ 的負數次冪的二項級數（binomial series）給出我們想要的係數，然後我們用已知的數列組合出 n^2。在第 (ii) 部分，我們把遞推關係（recurrence）乘以 x^n 再求和，從而化成關於 f 的方程：把數列的下標平移，等同於把它的生成函數乘以 x。

解答

第 (i) 部分

由指數為 -2 的二項級數，

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

因為 $\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$。乘以 x，

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

這裏重新編排求和下標後，可以無礙地把 $n=0$ 也包括在內（該項為 0）。所以 $u_n = n$ 的生成函數是 $x(1-x)^{-2}$，如題所求。

同理，取指數 -3，

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

所以

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

乘以 x 並如前重新編排下標，

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

所以該數列是 $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$，即 $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$，也就是三角數（triangular numbers）。

想一想 怎樣從我們現在已知的兩個數列得出 n^2？

生成函數是線性（linear）的：若 u_n 和 v_n 的生成函數分別是 f 和 g，則 $\alpha u_n + \beta v_n$ 的生成函數是 $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$。由於

$$n^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

$u_n = n^2$ 的生成函數是

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

第 (ii)(a) 部分

對每個 $n \geq 1$，有 $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$。對所有 $n \geq 1$ 求和：

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1}$$
$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

因為左邊的和是 $\mathrm{f}(x)$ 去掉常數項，而右邊的和在令 $m = n-1$ 後是 $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$。由於 $u_0 = a$，這就是 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$，如題所求。因此

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

（作為驗算，展開得 $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$，而確實 $u_n = ak^n$。）

第 (ii)(b) 部分

把 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ 乘以 x^n，並對 $n \geq 2$ 求和（遞推關係只由 $n = 2$ 起成立，所以必須由這裏開始）：

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2}.$$

想一想 這三個和各自缺少了 f 的哪些項？

左邊缺少 $u_0 + u_1x$ 這些項；右邊第一個和是 $u_1x + u_2x^2 + \cdots$，所以只缺少 u_0；第二個和就是整個 $\mathrm{f}(x)$。因此

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

代入 $u_0 = 0$ 和 $u_1 = 1$，這變成 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

這是斐波那契數（Fibonacci numbers）$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ 的生成函數。

驗算

- 展開 $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x+x^2)(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)$ 得 $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$，正是平方數，符合預期。
- 以長除法（long division）把 x 除以 $1 - x - x^2$，得 $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$。
- 在 $x = 0.1$：和 $\sum n^2(0.1)^n$ 與 $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$ 相符，而斐波那契數的 $\sum u_n(0.1)^n$ 與 $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$ 吻合。這些結果，連同題目中每個生成函數的首 30 個係數，均已用電腦核實。

常見錯誤

- 弄錯負指數的二項式係數（binomial coefficients）：來自 $\binom{-r}{n}$ 和來自 $(-x)^n$ 的正負號互相抵消，所以每個係數都是正數。
- 在 (ii)(b) 中由 $n = 0$ 或 $n = 1$ 開始求和，而遞推關係在那裏並不成立；或者忘記減去首項 u_0 和 u_1x。
- 把三角數寫成 $\frac{1}{2}n(n-1)$：檢查一下 $u_1 = 1$。

STEP 之外

把 $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$ 因式分解，其中 $\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$，再運用部分分式（partial fractions）配合第 (ii)(a) 部分，便得到比奈公式（Binet's formula）$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$。同一方法可以解任何常係數線性遞推關係，而生成函數是組合數學（combinatorics）和概率中的核心工具（在概率中它們成為概率生成函數（probability generating functions））。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）闡述概

率方面的內容；Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》）則是一本生動有趣、可免費取得的書，講述組合方面的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。