詳細解答

STEP I 2016，第 6 題

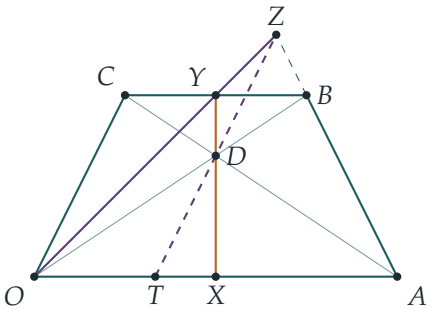
純數學 • 向量幾何

> **STEP I 2016，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q6

關鍵思路

圖中每一點都是兩條直線的交點，因此我們把每條直線寫成向量形式（vector form），然後令兩者相等。由於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行（parallel），任何向量都只能以唯一一種方式寫成 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$，所以把同一點的兩個表達式相等，就可以分別比較 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的係數（coefficients）。全程以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 為基（basis），每一步都只需解兩條簡短的線性方程（linear equations）。

解答



c 與 x 的形式

由於 CB 與 OA 平行，向量 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 的純量倍數(scalar multiple)，設 $\mathbf{c}-\mathbf{b}=k\mathbf{a}$，於是 $\mathbf{c}=k\mathbf{a}+\mathbf{b}$。沿四邊形（quadrilateral）$O\to A\to B\to C$ 走一圈，邊 BC 的方向必須與 OA 相反（若方向相同，邊 AB 與 CO 便會相交，$OABC$ 就不是真正的四邊形），而且 $C\neq B$。所以

$$k<0.$$

任何負值都有可能；$k=-1$ 時就是平行四邊形（parallelogram）。

由於 X 在 OA 上，$\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{a}$ 的倍數，設 $\mathbf{x}=m\mathbf{a}$；而 X 嚴格位於 O 與 A 之間，即

$$0<m<1.$$

此外，由於 O、A、B 不共線（collinear），$\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行。

點 Z

求 D。OB 上的點為 $\lambda\mathbf{b}$；AC 上的點為

$$\mathbf{a}+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(1-\mu+\mu k)\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}.$$

比較係數，得 $\lambda=\mu$ 及 $1-\mu(1-k)=0$。因為 $k<0$，所以 $1-k>0$，故 $\mu=\frac{1}{1-k}$，且

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{b}}{1-k}.$$

求 Y。BC 上的點為 $\mathbf{b}+t\mathbf{a}$。XD 上的點為

$$m\mathbf{a}+s(\mathbf{d}-m\mathbf{a})=m(1-s)\mathbf{a}+\frac{s}{1-k}\,\mathbf{b}.$$

由 $\mathbf{b}$ 的係數得 $s=1-k$，於是 $\mathbf{a}$ 的係數為 $m(1-(1-k))=mk$。所以

$$\mathbf{y}=\mathbf{b}+mk\,\mathbf{a}.$$

求 Z。OY 上的點為 $\rho(\mathbf{b}+mk\mathbf{a})$；$AB$ 上的點為 $\mathbf{a}+\sigma(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(1-\sigma)\mathbf{a}+\sigma\mathbf{b}$。比較係數，得 $\rho=\sigma$ 及 $\rho mk=1-\sigma$，所以 $\rho(mk+1)=1$。只要 $mk+1\neq 0$，便有

$$\mathbf{z}=\frac{\mathbf{b}+mk\,\mathbf{a}}{mk+1},$$

此即所求。（若 $mk=-1$——這在 $k<-1$ 時可能發生——則 $\mathbf{y}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，所以 OY 與 AB 平行，Z 不存在。）

想一想 Z 是否在邊 AB 本身之上？

不是：因為 $-1<mk<0$，所以 $\sigma=\frac{1}{mk+1}>1$，即 Z 位於 AB 越過 B 的延長線上，正如圖中所示。這並不要緊，因為題目討論的是直線。

點 T 與兩條關係式

DZ 上的點為 $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$。其 $\mathbf{b}$ 的係數為

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

這裏用了 $(1-k)-(mk+1) = -k(1+m)$。要 T 在 OA 上，此係數必須為零，所以 $\tau = \dfrac{mk+1}{k(1+m)}$（留意 $k \neq 0$）。於是 $\mathbf{a}$ 的係數為

$$\tau \cdot \frac{mk}{mk+1} = \frac{mk+1}{k(1+m)} \cdot \frac{mk}{mk+1} = \frac{m}{1+m}.$$

因此

$$\mathbf{t} = \frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

值得注意的是，k 消失了：T 只取決於 X 的位置。

現設 $a = |\mathbf{a}| = OA$。由於 $0 < \frac{m}{1+m} < 1$，T 位於 O 與 A 之間，所以

$$OT = \frac{ma}{1+m}, \qquad TA = a - \frac{ma}{1+m} = \frac{a}{1+m}, \qquad OX = ma.$$

因此

$$OT \times OA = \frac{ma^2}{1+m} = ma \times \frac{a}{1+m} = OX \times TA,$$

以及

$$\frac{1}{OX} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{ma} + \frac{1}{a} = \frac{1+m}{ma} = \frac{1}{OT},$$

這兩條正是所要證明的結果。

驗算

試用圖中的梯形（trapezium）：$\mathbf{a} = (4,0)$，$\mathbf{b} = (3,2)$，$k = -\frac{1}{2}$，$m = \frac{1}{2}$。於是 $D = (2, \frac{4}{3})$，$Y = (2,2)$，$Z = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$，$T = (\frac{4}{3}, 0)$；你可以驗證 T、D、Z 共線，而且 $\frac{1}{OT} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$。以電腦對 20,000 個隨機梯形作檢驗，結果與上述每條公式的誤差都在 10^{-10} 以內。極限情況 $m \to 1$（$X \to A$）給出 $OT = \frac{1}{2}OA$，與 $\frac{1}{OT} = \frac{2}{OA}$ 一致。

常見錯誤

- 取 $k > 0$：若 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + k\mathbf{a}$ 且 $k > 0$，這個「四邊形」會自我相交。
- 比較係數時沒有說明為何可以這樣做：這要依賴 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行。
- 對兩條不同的直線使用同一個參數（parameter）字母，這會強加一個虛假的重合。

STEP 之外

T 不取決於 k（亦不取決於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角），這說明它其實是仿射幾何（affine geometry），甚至是射影幾何（projective geometry）中的定理：要緊的只是點線的關聯

關係，以及同一直線上的比。關係式 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$ 正是交比（cross-ratio）與調和點列（harmonic range）能優雅處理的那類命題；而重複同一作圖，便可依次得到位於 $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$、$\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$ 等處的點。如欲深入了解，可參閱考克斯特（Coxeter）與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何學的新探索》），或考克斯特的 *Projective Geometry*（《射影幾何》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。