詳細解答

STEP I 2016，第 5 題

純數學 • 相切圓

STEP I 2016，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q5

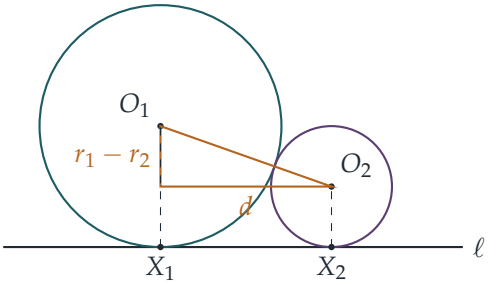
關鍵思路

一切都建基於一個事實：若兩個圓互相相切（touch），而且都與同一條直線相切，那麼它們與該直線的兩個切點之間的距離是 $2\sqrt{r_1 r_2}$。這只需要一個直角三角形（right-angled triangle）便可得出。之後，代換（substitution）$x = 1/\sqrt{a}$、$y = 1/\sqrt{b}$、$z = 1/\sqrt{c}$ 把 $(**)$ 化成一個對稱（symmetric）的四次式（quartic），而它可以因式分解（factorise）成四個一次因式（linear factor），其中一個因式恰好就是 $(*)$。

解答

第 (i) 部分

在直線上互相相切的兩個圓。取半徑分別為 r_1 和 r_2 的兩個圓，它們互相外切（touch externally），都位於直線 ℓ 的同一側，並分別在點 X_1 和 X_2 與 ℓ 相切。連到 X_1 和 X_2 的半徑都垂直於 ℓ，所以圓心 O_1、O_2 位於 ℓ 上方高度 r_1 和 r_2 之處。由於兩圓外切，$O_1O_2 = r_1 + r_2$。



從 O_2 向半徑 O_1X_1 作垂線（圖中 $r_1 \geq r_2$）。這樣便得到一個直角三角形，其斜邊（hypotenuse）為 $r_1 + r_2$，鉛垂邊為 $|r_1 - r_2|$，水平邊為 $d = X_1X_2$。由畢氏定理（Pythagoras' theorem），

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2, \qquad \text{所以} \qquad X_1X_2 = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

應用三次。在圖中，每兩個圓都互相相切，而三個圓都與直線相切，切點為 P、Q、R，其中 Q 位於 P 與 R 之間。所以

$$PQ = 2\sqrt{ab}, \qquad QR = 2\sqrt{bc}, \qquad PR = 2\sqrt{ac},$$

而由 $PQ + QR = PR$ 得 $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} = \sqrt{ac}$。兩邊除以 $\sqrt{abc} > 0$，

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

這正是 $(*)$。

推導 $(**)$。設 $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$、$y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$、$z = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$，於是 $\dfrac{1}{a} = x^2$，如此類推，而 $(*)$ 即是 $y = x + z$。那麼 $(**)$ 變成 $2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$；展開右方並移項，它等價於

$$F := x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0.$$

? **想一想** 這個四次式可以怎樣因式分解？

把它組合成平方差（difference of two squares）。由於 $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$，

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2 - z^2)(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) \\ &= ((x - y)^2 - z^2)((x + y)^2 - z^2) \\ &= (x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

由 $(*)$，$x - y + z = 0$，所以 $F = 0$，即 $(**)$ 成立。

第 (ii) 部分

現在 a、b、c 是任意滿足 $(**)$ 且 $b < c < a$ 的正數。如前定義 x、y、z；它們都是正數，而由於 $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ 在 $t > 0$ 上是遞減（decreasing）的，條件 $b < c < a$ 給出

$$y > z > x > 0.$$

如第 (i) 部分所示，$(**)$ 等價於

$$(x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z) = 0,$$

所以四個因式之中有一個為零。其中三個不可能為零：

- $x+y+z>0$，因為三者都是正數；
- $x+y-z>0$，因為 $y>z$ 且 $x>0$；
- $x-y-z<0$，因為 $x<y$ 且 $z>0$。

因此 $x-y+z=0$，即 $y=x+z$，亦即

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

這正是 $(*)$。（其實只需要用到 b 是三者中最小這一點。）

驗算

- 取 $a=4$、$c=1$。那麼由 $(*)$ 得 $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，所以 $b=\frac{4}{9}$。此時 $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$，而 $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$，正如 $(**)$ 所要求。
- 為甚麼 (ii) 需要大小次序的條件？取 $a=4$、$c=1$，關係式 $(**)$ 是 $1/b$ 的二次方程，有兩個根：$b=\frac{4}{9}$ 和 $b=4$（由 $1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$ 得出）。第二個根使 b 成為最大而非最小，它滿足 $(**)$ 卻不滿足 $(*)$：此時以 $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$ 聯繫起來的是 a 和 b。對調字母的角色，對應於對調哪一個圓位於中間。
- 以電腦對數以千計隨機生成、在一條直線上互相相切的三圓構形作檢驗，$(*)$ 和 $(**)$ 均得到證實。

常見錯誤

- 把圓心之間的距離 r_1+r_2 當作切點之間的距離：兩個圓心的高度並不相同。
- 在第 (ii) 部分，未排除其餘三個因式便從因式分解得出 $(*)$；這正是需要用到 $b<c<a$ 的地方。

STEP 之外

關係式 $(**)$ 是笛卡兒圓定理（Descartes' circle theorem）的退化情況（degenerate case）：對於四個兩兩相切、曲率（curvature）為 $k_i=1/r_i$ 的圓，有 $2\sum k_i^2=\left(\sum k_i\right)^2$，而一條直線可視為曲率為 0 的圓。不斷在空隙中填入新的圓，便得到阿波羅尼斯墊片（Apollonian gasket），其中整數曲率引出令人驚訝的數論（number theory）結果。F 的因式分解也正是希羅公式（Heron's formula）背後的那一個：$16\Delta^2=-F$，其中 x,y,z 為三角形的

三邊。若想進一步了解圓的幾何以及能令這些結果一目了然的反演（inversion），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。