詳細解答

# STEP I 2016，第 4 題

純數學 • 曲線的曲率

> **STEP I 2016，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q4

## 關鍵思路

$\kappa$ 的表達式看似一條艱深的二階微分方程（second-order differential equation），但第 (i) 部分正是要說明它其實是某個函數的導數，可直接積分（exact derivative）。設 $p = \mathrm{f}'(x)$，曲率（curvature）就是 $p/\sqrt{1+p^2}$ 對 $x$ 的導數，因此常數曲率一眼便可積分一次。第二次積分則屬例行工夫，而答案原來是一個熟悉的形狀。

## 解答

### 第 (i) 部分

對 $z(1+z^2)^{-1/2}$ 使用乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

### 第 (ii) 部分

設 $\kappa$ 為非零常數，並記 $p = \mathrm{f}'(x)$，於是 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$。由第 (i) 部分及鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{(1+(\mathrm{f}'(x))^2)^{3/2}} = \kappa.$$

對 $x$ 積分，存在一個常數，我們把它寫成 $-\kappa a$（因 $\kappa \neq 0$，這樣做是可行的），使得

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

**想一想** 如何從 $(*)$ 解出 $p$，而又不會弄錯正負號？

只要記住平方會丟失甚麼資訊，平方便是安全的。由於 $\sqrt{1+p^2} > 0$，$(*)$ 表示 $p$ 與 $\kappa(x-a)$ 同號；又因 $|p| < \sqrt{1+p^2}$，它亦表示 $|\kappa(x-a)| < 1$。兩邊平方，得 $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$，所以

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{並按上述選取正負號，} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

反過來，這個 $p$ 確實滿足 $(*)$，因為 $1+p^2 = 1/(1-\kappa^2(x-a)^2)$。

現在再積分一次。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$，對某常數 $b$，我們得到

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

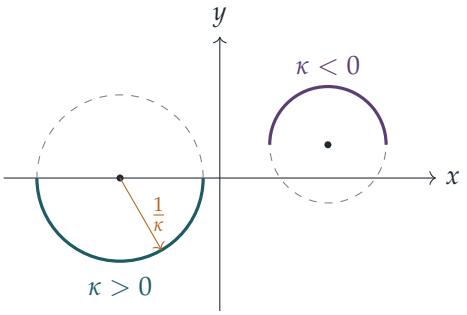
整理後得 $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$，再平方便得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

因此，每條具有非零常數有號曲率（signed curvature）$\kappa$ 的曲線，都是以 $(a,b)$ 為圓心、半徑為 $1/|\kappa|$ 的圓的一部分；而且每段這樣的圓弧都會出現：把步驟倒過來，上述每個函數的有號曲率都恰好是 $\kappa$。更準確地說，$\kappa(y-b) \leq 0$，所以：

- 若 $\kappa > 0$，曲線是下半圓 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$，位於圓心下方，向上彎曲（$\mathrm{f}'' > 0$）；
- 若 $\kappa < 0$，曲線是上半圓 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$，位於圓心上方，向下彎曲（$\mathrm{f}'' < 0$）。

端點 $x = a \pm 1/|\kappa|$ 須排除，因為該處斜率為無限大；曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ 只能是一個函數的圖像，所以它最多只能是一個開半圓（或其中一段）。



### 幾何意義

對這些曲線而言，$|\kappa|$ 是圓半徑的倒數，所以 $|\kappa|$ 越大，圓就越小、彎得越緊。$\kappa$ 的正負號記錄曲線向哪一方彎曲：當圓心位於曲線上方（曲線上凹（concave up））時 $\kappa > 0$；當圓心位於曲線下方時 $\kappa < 0$。

## 驗算

- 取 $\kappa = \frac{1}{2}$，$a = b = 0$：曲線是 $y = -\sqrt{4 - x^2}$，即半徑為 2 的圓的下半部分。在 $x = 1$ 處，$y = -\sqrt{3}$，$y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}$，而 $y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$，所以 $1 + y'^2 = \frac{4}{3}$，且 $\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$，與預期相符。
- 直線有 $\mathrm{f}'' = 0$，所以 $\kappa = 0$：這是半徑 $1/|\kappa| \to \infty$ 時圓的極限，亦是題目排除 $\kappa = 0$ 的原因。
- 用電腦從隨機初始值逐步數值求解 $\mathrm{f}'' = \kappa(1 + \mathrm{f}'^2)^{3/2}$，所得各點準確至小數點後六位都留在預測的圓上。

## 常見錯誤

- 第一次積分時忘記積分常數（constant of integration），因而失去把圓心左右移動的自由度。
- 為 $p$ 選錯平方根，結果得到位於圓心錯誤一側的半圓，以及錯誤的 $\kappa$ 正負號。
- 只說「$\kappa$ 是半徑」：其實它是半徑的倒數，並帶有表示彎曲方向的正負號。

## STEP 之外

曲率是曲線微分幾何（differential geometry）的起點。對以弧長（arc length）$s$ 參數化的曲線，$\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$，其中 $\psi$ 是切線（tangent）與 $x$ 軸所成的角；這裏 $p/\sqrt{1 + p^2} = \sin\psi$，所以 $(*)$ 實際上是說 $\psi$ 沿曲線以恆定速率變化。在三維空間中，曲率之外還有撓率(torsion)，而 Frenet–Serret 公式(Frenet–Serret formulae)顯示，這兩個函數在相差一個剛體運動(rigid motion)的意義下決定了一條曲線。Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（《初等微分幾何》）是一本大學一年級程度、平易近人的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。