詳細解答

STEP I 2016，第 12 題

概率與統計 • 二項分佈的對稱性

STEP I 2016，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 12.6 節多一枚硬幣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/one-more-coin.html

關鍵思路

第 (i) 部分和第 (ii) 部分是直接運用二項概率（binomial probabilities）的計算，而兩者都得出同一個簡單得驚人的答案。第 (iii) 部分則解釋箇中原因。把 Bob 的擲幣分成前 n 次和額外的一次：在前 n 次擲幣中，Bob 和 Alice 處於完全對等的地位，所以對稱性（symmetry）便能解決問題；而額外的一次擲幣則公平地打破平局。

解答

全文中，設 A 為 Alice 擲得正面的次數，B 為 Bob 擲得正面的次數。把一枚公正硬幣擲 m 次，正面次數 X 滿足

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

而 Alice 和 Bob 的擲幣互相獨立（independent），所以可以把 A 和 B 的概率相乘。

第 (i) 部分

Alice 擲兩次，Bob 擲三次，所以

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

以 Alice 的得分為條件（condition on）。給定 $A = a$，我們需要 $B > a$，因此需要尾概率（tail probabilities）$\mathrm{P}(B > 0) = \frac{7}{8}$、$\mathrm{P}(B > 1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(B > 2) = \frac{1}{8}$。故此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B > A) &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{8} \\ &= \frac{7+8+1}{32} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

現在對 $a = 0,1,2,3$，有 $\mathrm{P}(A = a) = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$；而對 $k = 0,\ldots,4$，有 $\mathrm{P}(B = k) = \frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$。尾概率為

$$\mathrm{P}(B > 0) = \tfrac{15}{16}, \quad \mathrm{P}(B > 1) = \tfrac{11}{16}, \quad \mathrm{P}(B > 2) = \tfrac{5}{16}, \quad \mathrm{P}(B > 3) = \tfrac{1}{16}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B > A) &= \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{15}{16} + \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{11}{16} + \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{5}{16} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{16} \\ &= \frac{15+33+15+1}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

答案再一次恰好是 $\frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

首先，看看擲幣次數相同的遊戲的一個事實。當 Alice 和 Bob 各擲 n 次時，「Bob 較多」、「相同」、「Alice 較多」三者中恰有一個發生。兩名玩家的處境是對稱的（他們進行完全相同的試驗），所以「Alice 較多」的概率也是 p_2。因此

$$2p_2 + p_1 = 1. \qquad (*)$$

現在讓 Alice 擲 n 次，Bob 擲 $n+1$ 次。設 B' 為 Bob 前 n 次擲幣中正面的次數，並設 H 為他最後一次擲得正面的事件。那麼若 H 發生，則 $B = B' + 1$；否則 $B = B'$。

> ? **想一想** 比較 B 與 A 的結果，怎樣取決於比較 B' 與 A 的結果？

由於 B' 和 A 都是整數，而 B 不是 B' 就是 $B' + 1$：

- 若 $B' > A$，則無論最後一次結果如何，必然有 $B > A$；
- 若 $B' = A$，則 $B > A$ 當且僅當最後一次擲得正面；
- 若 $B' < A$，則 $B' \leq A - 1$，所以 $B \leq A$，Bob 不會勝出。

Bob 的前 n 次擲幣對 Alice 的 n 次擲幣，正正就是擲幣次數相同的遊戲，所以 $\mathrm{P}(B' > A) = p_2$ 及 $\mathrm{P}(B' = A) = p_1$。最後一次擲幣與其他一切獨立，且 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$。故此

$$\mathrm{P}(\text{Bob 擲得的正面比 Alice 多}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

由 $(*)$，$p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$。

這就是所求的推廣（generalisation）：*若 Alice 把一枚公正硬幣擲 n 次，而 Bob 把一枚公正硬幣擲 $n+1$ 次，則對每個 $n \geq 0$，Bob 擲得的正面比 Alice 多的概率都是 $\frac{1}{2}$*。第 (i) 部分和第 (ii) 部分分別是 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的情況。

驗算

- $n = 0$：Alice 不擲，Bob 擲一次；Bob 勝出當且僅當他擲得正面，概率為 $\frac{1}{2}$。
- $n = 2$：用手計算，$p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$，再由 $(*)$ 得 $p_2 = \frac{5}{16}$。於是 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$，與第 (i) 部分吻合。
- 用電腦精確窮舉（exact enumeration）證實，對每個不超過 29 的 n，都有 $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$；而對第 (ii) 部分進行 200 000 次試驗的模擬（simulation），得出 0.4997。

常見錯誤

- 在擲幣次數相同的遊戲中假設 $p_2 = \frac{1}{2}$：平局的概率是正數，所以 $p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$。
- 在第 (iii) 部分漏掉 $B' = A$ 的情況，或把它整個計入，而沒有乘上額外一次擲幣的因子 $\frac{1}{2}$。
- 用了尾概率 $\mathrm{P}(B \geq a)$ 而不是 $\mathrm{P}(B > a)$。

STEP 之外

這個簡潔的答案來自對稱性論證，再加上以額外一步為條件——這種模式貫穿整個概率論，從隨機遊走（random walks）到選票問題（ballot problems）都可見到。還有一個更巧妙的版本：由於 Bob 多擲一次，他未能擲得比 Alice 多的正面，當且僅當他擲得比她多的反面。把正面和反面互換，可見「正面較多」與「反面較多」的概率相等，而兩者互補（complementary），所以各自的概率都是 $\frac{1}{2}$。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）一書，對這些條件化和對稱性技巧有深入的發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。