詳細解答

STEP I 2016，第 11 題

力學 • 拋體的最大射程

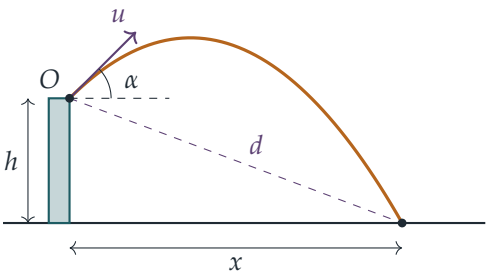
> **STEP I 2016，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q11

關鍵思路

寫出水平和鉛直方向的運動，消去時間，再把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的平方化成倍角（double angle）。至於最大射程，把落地方程視為以隱函數（implicit function）方式把 x 定義為 α 的函數，然後對它求導：在最大值處 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$，餘下的就只是關於單一未知量 $\cos 2\alpha$ 的三角代數運算。

解答

我們把 P 模擬為只受重力作用的質點（particle）（不計空氣阻力（air resistance）），並假設平地是水平的。取坐標軸，原點在塔底，x 軸沿發射方向水平，y 軸鉛直向上，因此 O 為點 $(0, h)$。



落地方程

發射後時間 t 時，

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

塔是直立的，而 P 落在某個距離 $x > 0$ 處，所以 $\cos\alpha \neq 0$，且在落地時（即 $Y = 0$ 時）$t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$：

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

兩邊乘以 $2\cos^2\alpha$，並利用 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ 及 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$：

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1+\cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

這正是所求的方程。

最大水平距離

角 α 的取值範圍為 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$（容許向下發射）。對每個這樣的 α，落地距離 x 是 α 的正值光滑函數，而且當 $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ 時 $x \to 0$，因為水平速率 $u\cos\alpha$ 趨於 0，而飛行時間保持有界。因此 x 在某個內部的 α 處取得最大值，而在該處 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$。

把落地方程對 α 求導，記 $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$：

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

令 $x' = 0$，得

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

這裏 $\cos 2\alpha \neq 0$：否則由 $h\sin 2\alpha = 0$ 及 $h > 0$，便會迫使 $\sin 2\alpha = 0$ 同時成立，這是不可能的。所以在最大值處

$$x = h\tan 2\alpha,$$

即為所求。

> **想一想** 現在我們有兩條關於 x 和 α 的方程。怎樣才能乾淨俐落地消去 x？

把 $x = h\tan 2\alpha$ 代入落地方程，並記 $c = \cos 2\alpha$、$s = \sin 2\alpha$。右方變為

$$h(1+c) + h\,\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1+c)}{c},$$

而左方為

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2} = \frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

令兩者相等，再除以 $h(1+c)/c$——它不為零，因為 $c \neq -1$（我們已證明 $c \neq 0$，而 $c = -1$ 會給出 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$）：

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c} = 1 \quad\Longrightarrow\quad gh - ghc = u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha = \frac{gh}{u^2+gh}.$$

由於這是駐點（stationary point）處唯一可能的值，而 $\tan 2\alpha = x/h > 0$ 確定了 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$，所以恰好只有一個駐點，而它就是最大值。（順帶一提，$\tan 2\alpha = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$，所以最大距離為 $x = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$。）

與 O 的最大距離

落地點在 $(x, 0)$，所以它與 $O = (0, h)$ 的距離為

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

在 h 固定的情況下，d 隨 x 遞增，所以 d 恰好在 x 最大時取得最大值。在該處 $x = h\tan 2\alpha$，所以

$$d = \sqrt{h^2\tan^2 2\alpha + h^2} = h\sec 2\alpha = h \cdot \frac{u^2+gh}{gh} = \frac{u^2}{g} + h,$$

這裏用到 $\sec 2\alpha > 0$。這就是所求的最大距離。

驗算

- 當 $h = 0$ 時，得 $\cos 2\alpha = 0$，所以 $\alpha = 45°$，最大射程為 u^2/g：正是在平地上我們熟悉的結果。
- 取 $u = 10$、$g = 10$、$h = 5$（國際單位制）。那麼 $\cos 2\alpha = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$，最大射程為 $\sqrt{100\cdot 200}/10 = 10\sqrt{2} \approx 14.14$，而 $d = \sqrt{200+25} = 15 = \frac{100}{10} + 5$，與預測相符。用電腦對 α 進行搜索，亦證實 14.14 是最大的落地距離。
- 當 h 增大時，$\cos 2\alpha \to 1$，所以最佳角度趨於 0：從極高的塔上發射，應該差不多水平地射出。

常見錯誤

- 寫出 $x = h\tan 2\alpha$ 後，忘記它只在最大值處成立，而非對所有 α 都成立。
- 除以 $1 + \cos 2\alpha$ 或 $\cos 2\alpha$ 時，沒有說明它們為何不為零。
- 另行對 d 求最大值，而沒有留意到 $d^2 = x^2 + h^2$ 與 x 在同一角度取得最大值。

STEP 之外

答案 $d = u^2/g + h$ 有一個優美的幾何解釋。所有從 O 以速率 u 射出的軌跡，都與同一條包絡線（envelope）相切，這就是「安全拋物線」（parabola of safety），它的焦點

（focus）在 O，準線（directrix）位於 O 上方高度 u^2/g 處。最遠的落地點位於這條包絡線上，所以根據焦點—準線性質，它與 O 的距離等於它在準線下方的距離，即 $u^2/g + h$。曲線族的包絡線是大學一年級微積分和力學的標準課題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是下一步的好選擇，書中以同樣嚴謹的方式處理拋射體問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。