詳細解答

STEP I 2016，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2016，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q10

關鍵思路

題中共有三次碰撞（collision），每一次都用同樣的兩條方程處理：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）。頭兩次碰撞同時發生，但彼此獨立，所以可以分開計算，求出 B 和 C 相遇前一刻的速度。再由 B 最終靜止這個條件，得到一條聯繫 λ 與 e 的方程。

解答

我們把四個物體視為光滑桌面上的質點（particle），因此除碰撞外沒有水平力作用，而且每次碰撞都是正碰（direct collision，即沿同一直線發生）。取由 A 指向 D 的方向為正方向，於是 A 的初速度為 u，D 的初速度為 $-u$。



第 (i) 部分

A **撞** B。設碰撞後 A 和 B 的速度分別為 v_A 和 v_B。則

$$\begin{aligned} \text{動量：} \quad & \lambda m u = \lambda m v_A + m v_B, \\ \text{恢復：} \quad & v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

把 $v_B = v_A + eu$ 代入第一條方程，得 $(\lambda+1)v_A = (\lambda - e)u$，所以

$$v_A = \frac{(\lambda-e)u}{\lambda+1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D **撞** C。設碰撞後 C 和 D 的速度分別為 v_C 和 v_D。則

$$\begin{aligned} \text{動量：} \quad & -mu = mv_C + mv_D, \\ \text{恢復：} \quad & v_D - v_C = e(0-(-u)) = eu. \end{aligned}$$

（碰撞前 C 與 D 以速率 u 互相接近；碰撞後 D 在 C 的右方，所以兩者以 $v_D - v_C$ 的速率分離。）解這兩條方程：

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

因此 C 以速率 $\frac{1}{2}(1+e)u$ 向 B 移動，而 D 則以較小的速率 $\frac{1}{2}(1-e)u$ 跟在後面向左移動。

B **撞** C。此時 B 以 v_B 向右移動，C 向左移動，所以兩者的接近速率為 $v_B - v_C$。碰撞後 B 靜止；設 C 的速度為 w。則

$$\begin{aligned} \text{動量：} \quad & mv_B + mv_C = 0 + mw, \\ \text{恢復：} \quad & w - 0 = e(v_B - v_C). \end{aligned}$$

消去 w，得 $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$，即

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

代入上面求得的速度：

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

由於 $u \neq 0$ 且 $1+e>0$，可以兩邊除以 $(1+e)u$：

$$\begin{aligned} 2\lambda(1-e) &= (1+e)(\lambda+1) \\ 2\lambda - 2\lambda e &= \lambda + 1 + e\lambda + e \\ \lambda - 1 &= e(3\lambda+1), \end{aligned}$$

又因 $3\lambda+1>0$，

$$e = \frac{\lambda-1}{3\lambda+1},$$

即為所求。

至於推論部分，

$$\frac{1}{3} - e = \frac{(3\lambda+1)-3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)} = \frac{4}{3(3\lambda+1)} > 0,$$

因為 $\lambda > 1$。故 $e < \frac{1}{3}$。（另外，由於 $\lambda>1$，有 $e>0$，所以這些碰撞確實不是完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）。）

第 (ii) 部分

第三次碰撞後，C 的速度為

$$w = v_B + v_C = (1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

由於 $\lambda > 1$，此值為正：C 現在向右移動，折返向 D，而 D 仍以速率 $\frac{1}{2}(1-e)u$ 向左移動。

> **想一想** 「速率相同」給出哪一條方程？又怎樣消去 e？

兩者速率相等時，

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)} = \frac{1-e}{2}.$$

由第 (i) 部分，$1+e = \dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$，$1-e = \dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$。代入並約去公因子 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$：

$$\frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1} = 2(\lambda+1)$$

$$2\lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0,$$

所以 $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$。只有 $\lambda = 2+\sqrt{5}$ 滿足 $\lambda > 1$（另一個根是負數）。於是

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}-8}{4} = \sqrt{5}-2.$$

因此

$$\lambda = 2+\sqrt{5}, \qquad e = \sqrt{5}-2.$$

驗算

- $e = \sqrt{5}-2 \approx 0.236$，確實介乎 0 與 $\frac{1}{3}$ 之間，符合第 (i) 部分的要求。
- 取 $\lambda = 2+\sqrt{5} \approx 4.236$、$u = 1$、$e \approx 0.236$，以數值逐一計算三次碰撞，得第三次碰撞前 $v_B = 1$（恰巧是精確值）及 $v_C \approx -0.618$；碰撞後 B 靜止，C 以約 0.382 的速率向右移動，而 D 以約 0.382 的速率向左移動。共同速率為 $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$。
- 極限情況：當 $\lambda \to 1$ 時，$e \to 0$。質量相等且 $e = 0$ 時，B 與 C 以大小相等、方向相反的速度相遇，因此兩者黏合後靜止，結果合理。

常見錯誤

- 在 C 與 D 碰撞的恢復方程中弄錯正負號：所有速度都應以同一個正方向表示，並小心運用「分離速率 $= e\times$ 接近速率」。

- 忘記 C 到達第三次碰撞時是朝向 B 移動的，所以接近速率是 $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$，而不是 $v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$。
- 保留了負數根 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$。

STEP 之外

帶恢復係數的碰撞是能量損失最簡單的模型：正碰中損失的動能（kinetic energy）與 $1 - e^2$ 成正比，而 $e = 1$ 就是能量守恆的彈性碰撞（elastic collision）。在大學一年級的課程中，這些概念會引出質心參考系（centre-of-mass frame）：在這個參考系中，任何二體碰撞看起來都是對稱的，上面的代數運算幾乎變得微不足道。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）就是以這種方式講解碰撞的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。