詳細解答

STEP I 2016，第 1 題

純數學 • 多項式恆等式與因式分解

> **STEP I 2016，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

關鍵思路

商（quotient）$q_n(x)$ 其實是一個多項式（polynomial）：由於 $2n+1$ 是奇數，$x+1$ 整除 $x^{2n+1}+1$，而商是一個正負交替的等比數列之和。因此第 (i) 部分只需展開 p_n 並比較係數（coefficients）。第 (ii) 部分的關鍵在於 p_n 的形式：當 $2n+1$ 乘以 x 是完全平方數（perfect square）時，p_n 是兩個平方數之差（difference of two squares），因此可以因式分解（factorise）。

解答

第 (i) 部分

當 $x \neq -1$ 時，把首項為 1、公比為 $-x$ 的等比級數（geometric series）求和，得

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

這裏用到了 $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$，因為 $2n+1$ 是奇數。所以

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

它的 $2n+1$ 個係數全部是 ± 1，而且正負交替。接下來我們逐一展開 p_n。

$n = 1$.

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$. 首先 $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$，所以

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

因此當 $n = 1, 2, 3$ 時，對 $x \neq -1$ 有 $p_n(x) \equiv q_n(x)$，正如所求。

$n = 4$. 只需一個 x 值便足以推翻一條恆等式（identity）。當 $x = 1$ 時，

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

所以 $p_4 \not\equiv q_4$。（完全展開可得 $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$，從 x^5 項起便出錯。）

第 (ii) 部分

想一想 應該用哪個 n 和哪個 x？p_n 又怎樣才可能因式分解？

把 $\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ 與題目給出的數對應起來，便確定了 x 和 n。這時 p_n 的形式就派上用場：$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$ 必定是平方數，而當 n 是奇數時，$(x^2+x+1)^{n-1}$ 也是平方數。因此，若 $(2n+1)x$ 同樣是完全平方數，$p_n(x)$ 便是兩個平方數之差。

(a) 取 $n = 1$ 及 $x = 300$，於是 $2n+1 = 3$，且 $3x = 900 = 30^2$。由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

兩個因數都不是 1。（直接計算，$300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$。）

(b) 由於 $7^{49} = (7^7)^7$，取 $n = 3$（於是 $2n+1 = 7$）及 $x = 7^7$。那麼 $(2n+1)x = 7 \cdot 7^7 =$

$7^8 = (7^4)^2$ 是完全平方數，而且 $n-1=2$ 是偶數。由第 (i) 部分，

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) = (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2$$
$$= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,$$

所以

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

第二個因數顯然大於 1。至於第一個因數，$(7^7+1)^3 > 7^{21}$，而

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18}+7^{11}+7^4 < 7^{19},$$

所以第一個因數大於 $7^{21}-7^{19} = 48\cdot 7^{19} > 1$。兩個因數都不是 1，於是得到所求的因式分解。（把括號乘開，兩個因數亦可寫成 $7^{21}+3\cdot 7^{14}+3\cdot 7^7+1 \mp (7^{18}+7^{11}+7^4)$。）

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $x=1$：$p_1(1) = 4-3 = 1$，$p_2(1) = 16-15 = 1$，$p_3(1) = 64-63 = 1$，全部等於 $q_n(1)=1$，而 $p_4(1) = 13$。
- 在 (a) 中，$271\times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$。
- 在 (b) 中，用電腦檢驗準確的整數值，證實兩個因數之積等於 $(7^{49}+1)/(7^7+1)$；兩個因數分別約為 5.57×10^{17} 和 5.60×10^{17}。

常見錯誤

- 忘記說明為何兩個因數都不是 1；在 (b) 中這需要簡短地估計大小。
- 在 (b) 中用 $n=24$ 或 $x=7$：指數 49 必須寫成 7×7，從而得到 $x=7^7$ 及 $2n+1=7$。

STEP 之外

這裏的技巧是奧里費伊因式分解（Aurifeuillean factorisation）的一個特例：例如 $x^4+4y^4 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$ 這類恆等式，能把形如 $a^k\pm 1$ 的數分解得比明顯的代數因式更細。它們源自分圓多項式（cyclotomic polynomials），這是大學一年級代數和數論（number theory）課程會出現的內容，而且曾被用於分解形如 $2^k\pm 1$ 的大數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步了解因式分解和質數（primes）的好讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。