詳細解答

STEP III 2015，第 9 題

力學 • 非線性彈性振動

> **STEP III 2015，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q9

關鍵思路

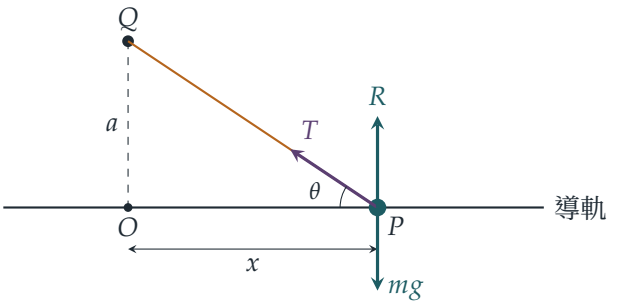
導軌光滑（smooth），法向反作用力（normal reaction）不做功，所以能量守恆（conservation of energy），由此即可直接得到一階方程（first-order equation）。由於在導軌上每一點都有 $PQ \geq a$，弦從不鬆弛（slack）。轉向點（turning point）就是 $\dot{x} = 0$ 的位置。週期（period）是由中心走到 x_0 所需時間的四倍。當 v 很小時，質點一直停留在起點附近，所以 $\sqrt{x^2 + a^2} - a \approx x^2/(2a)$，而代換（substitution）$x = x_0 u$ 則可把積分整理好。

解答

能量方程

把 P 視為質點，弦視為輕而有彈性、遵從胡克定律（Hooke's law）。取導軌為 x 軸，P 從原點出發，原點即由 Q 所作垂線的垂足。當 P 位於 x 時，它與 Q 的距離為 $PQ = \sqrt{x^2 + a^2} \geq a$，所以弦是拉緊的，其伸長量（extension）為

$$e = \sqrt{x^2 + a^2} - a \quad (\geq 0).$$



作用於 P 的力有其重量、導軌的法向反作用力 R（兩者都與運動方向垂直，所以不做功），以及張力（tension）T。張力是保守力（conservative force），其彈性勢能（elastic potential energy）為 $\lambda e^2/(2a)$。開始時 $e=0$，速率為 v，所以能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\tfrac{1}{2}mv^2.$$

兩邊乘以 $2/m$，並記 $k^2=\lambda/(ma)$，得

$$\dot{x}^2=v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2,$$

此即所求。

最大位移及該處的加速度

伸長量 e 隨 $|x|$ 增大而增大，所以 P 向外移動時 $\dot{x}^2$ 遞減，而 P 會一直向外移動，直至 $\dot{x}=0$。在該點 $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2}-a\right)=v$（由於 $e\geq 0$，取正根）。因此

$$\sqrt{x_0^2+a^2}=a+\frac{v}{k}\quad\Longrightarrow\quad x_0^2=\left(a+\frac{v}{k}\right)^2-a^2=\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2},$$

得

$$x_0=\frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

求加速度時，沿導軌方向分解。設 θ 為 PQ 與導軌之間的夾角，則 $\cos\theta=x/\sqrt{x^2+a^2}$，而張力沿導軌的分量為 $T\cos\theta$，指向 O。由 $T=\lambda e/a$，

$$m\ddot{x}=-\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad\text{所以}\qquad\ddot{x}=-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

（把能量方程對 t 求導，再約去 $2\dot{x}$，亦得到相同結果。）在 $x=x_0$ 處有 $\sqrt{x_0^2+a^2}-a=v/k$ 及 $\sqrt{x_0^2+a^2}=(ak+v)/k$，所以

$$\ddot{x}=-k^2\cdot\frac{v}{k}\cdot\frac{k\,x_0}{ak+v}=-\frac{k^2v\,x_0}{ak+v}=-\frac{kv\sqrt{v\,(2ak+v)}}{ak+v}.$$

因此在 x_0 處加速度的大小為 $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak+v)}}{ak+v}$，方向沿導軌指回初始位置。

週期

$\dot{x}^2$ 的方程只依賴於 x^2，所以運動關於 O 對稱。質點在 $-x_0$ 與 x_0 之間振盪，而 $O\to x_0\to O\to -x_0\to O$ 這四段各需相同的時間。在第一段中 $\dot{x}>0$，所以 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\dot{x}$，週期為

$$\tau=4\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2}}.$$

被積函數（integrand）在 x_0 處趨於無窮，但只是如 $(x_0-x)^{-1/2}$ 般增長，所以積分收斂（converge）。

> **想一想** $v \ll ka$ 告訴我們 x 的大小是怎樣的？

由於 $x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$，若 $v/k \ll a$，則 $x_0^2 \approx 2av/k$，所以 $x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$。因此積分範圍內每個 x 都滿足 $|x| \ll a$，而二項式展開（binomial expansion）給出

$$\sqrt{x^2+a^2} - a = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

週期變為

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

而這個近似的 x_0 正好是新分母等於零的位置，因為 $k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$。現在代入 $x = x_0u$，於是 $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$ 及 $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$：

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1-u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

因為 $\frac{16}{v^2}\cdot\frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$。這就是所求的近似式。

驗算

- 單位：$k^2 = \lambda/(ma)$ 的單位是 s^{-2}，所以 v/k 是長度（理應如此，因為它是 x_0 處的伸長量），而 $\sqrt{a/(kv)}$ 是時間。
- 取 $m=1$、$\lambda=2$、$a=1$、$v=1$，得 $k=\sqrt{2}$、$x_0 = \sqrt{1+2\sqrt{2}} \approx 1.3836$，以及 x_0 處的加速度 ≈ -1.1462。以數值方法逐步推進運動方程，得到相同的轉向點，週期約為 7.612，與積分結果吻合。
- 取 $a=1$、$k=2$、$v=0.001$，精確的週期積分為 165.862，而近似式給出 165.833，其中 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$。當 $v\to 0$ 時，兩者之比趨於 1。

常見錯誤

- 把伸長量當作 x 或 $\sqrt{x^2+a^2}$，而不是 $\sqrt{x^2+a^2}-a$；弦開始時處於自然長度（natural length）。
- 忘記分解張力：只有分量 $T\cos\theta$ 沿導軌作用。
- 把週期當作 $2\int_0^{x_0}$ 或 $\int_0^{x_0}$；振盪是在 $-x_0$ 與 x_0 之間進行的，所以需要四個四分之一週期。

STEP 之外

當 v 很小時，回復力（restoring force）大致與 x^3 而非 x 成正比，所以這是一個非線性振子（nonlinear oscillator），其週期依賴於振幅（amplitude）：與簡諧運動（simple harmonic motion）不同，能量越小，週期越大，按 $v^{-1/2}$ 增長。積分 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 是一個橢圓積分（elliptic integral）（等於雙紐線常數（lemniscate constant）的一半），擺（pendulum）的精確週期也會出現這類積分。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以同樣的精神講解能量方法和振盪。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。