詳細解答

STEP III 2015，第 8 題

純數學 • 極坐標微分方程

STEP III 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 8.4 節盤旋趨向圓中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/limit-cycle.html

關鍵思路

兩條微分方程（differential equations）都由組合 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 和 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 構成，而這正是極坐標（polar coordinates）能夠化簡的式子：它們分別變成 $r^2\,\mathrm{d}\theta$ 和 $r\,\mathrm{d}r$。因此我們把 θ 視為沿曲線的參數（parameter），把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 寫成兩個對 θ 的導數（derivative）之比，讓三角部分自行化簡。在第 (ii) 部分，新增的項使方程變成關於 r 的伯努利方程（Bernoulli equation），而代換 $u = r^{-2}$ 可把它化為線性（linear）方程。

解答

記 r' 為 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，$c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$。沿曲線 $r = r(\theta)$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

把任一方程兩邊乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$，形如 $P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ 的方程便變成

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

全部工夫都靠以下兩條恆等式：

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

第 (i) 部分

這裏 $P = y + x$ 而 $Q = y - x$，所以

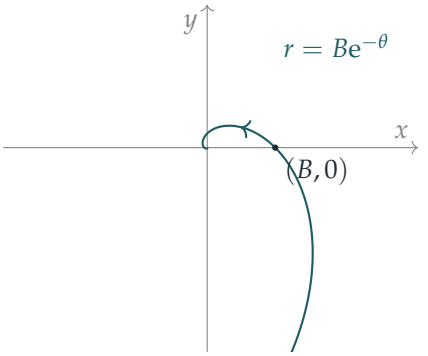
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

因此方程為 $r(r' + r) = 0$，由於 $r > 0$，可以除以 r，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

即所求。

這是可分離變數（separable）的方程（或直接認出它是指數衰減）：$r = B\mathrm{e}^{-\theta}$，其中 $B > 0$。這是一條等角螺線（equiangular spiral），亦稱對數螺線（logarithmic spiral）。當 θ 增加時，曲線以逆時針方向繞向原點，但永不到達；當 θ 減少時，它無界地向外盤旋。由於 $r/r' = -1$，曲線與每條由原點出發的射線都以相同角度相交，即與指向原點的徑向成 45°。不同的 B 給出同一螺線的旋轉，因為 $B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$。



箭頭表示 θ 增加的方向。螺線每繞一圈便縮小 $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ 倍，所以在任何比例下都只看得見大約一圈；其餘部分都緊密地擠在原點周圍。

第 (ii) 部分

現在 $P = y + x - x(x^2 + y^2)$ 而 $Q = y - x - y(x^2 + y^2)$，其中 $x^2 + y^2 = r^2$。新增的項貢獻

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

所以利用第 (i) 部分處理原有的項，方程變成

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

同樣是除以 $r > 0$ 所得。

想一想 r^3 這一項令方程不再是線性的，我們該如何處理它？

這是一條伯努利方程。目標答案以 r^2 表示，提示我們使用 $u = r^{-2}$。於是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

所以 $u' - 2u = -2$，這是一條常係數線性方程：$u = 1$ 是一個特解（particular solution），而 $A\mathrm{e}^{2\theta}$ 是齊次方程（homogeneous equation）的解，因此

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

這正是所求的形式。（分離變數，並對 $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$ 使用部分分式（partial fractions），亦可得出相同結果，只是較費工夫。）曲線只在 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ 的地方存在。

解的形狀

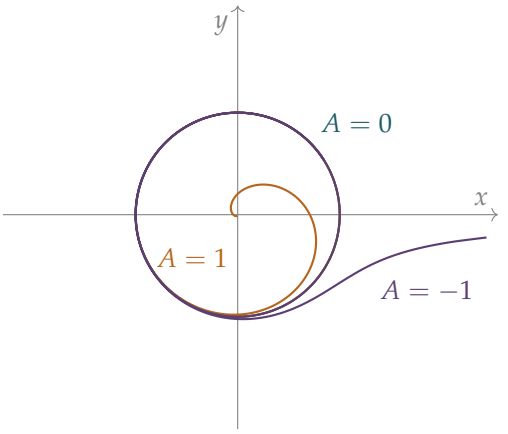
首先留意，若 $A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$，則 $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$，所以對應 A 的曲線，就是對應 $A = \pm 1$ 的曲線旋轉 α 所得。因此按 A 的正負號，實際上只有三種形狀。

- $A = 0$：$r = 1$，即單位圓。
- $A > 0$：$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$，所以 $r < 1$，而曲線對每個 θ 都有定義。由於 $r' = r(r^2 - 1) < 0$，r 穩定地遞減。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$，所以曲線從內側向外盤旋趨向單位圓；當 $\theta \to +\infty$ 時，$r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$，所以它盤旋進入原點，看起來愈來愈像第 (i) 部分的螺線。
- $A < 0$：我們需要 $\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$，即 $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$。此時 $r > 1$ 且 $r' > 0$。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$ 從上方趨近，所以曲線從外側向內盤旋趨向單位圓；當 $\theta \to \theta_0^-$ 時，$r \to \infty$。在 θ_0 附近，$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$（因為 $A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$），所以 $r \approx \big(2(\theta_0 - \theta)\big)^{-1/2}$，而曲線到直線 $\theta = \theta_0$ 的距離為

  $$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

  因此曲線趨向無窮遠，並以通過原點、傾角為 θ_0 的直線為漸近線（asymptote），從順時針一側趨近它。當 $A = -1$ 時，$\theta_0 = 0$，而對於大的 x，曲線最終貼近 $y = -\frac{1}{2x}$。

單位圓是一個極限環（limit cycle）：當 $\theta \to -\infty$ 時，其他每個解都盤旋趨向它；當 θ 增加時，則盤旋離開它。



紫紅色曲線（$A=-1$）沿正 x 軸、緊貼其下方伸向無窮遠。

驗算

- 把 $r=B\mathrm{e}^{-\theta}$ 代回第 (i) 部分的原方程，在幾個點上檢查（換算成 x、y 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$），結果為零；對第 (ii) 部分的公式，取若干正負不同的 A 值檢查，結果亦然。
- $A=0$ 給出 $r=1$，而常數 $r=1$ 確實滿足 $r'=r^3-r$；以 x、y 表示，圓 $x^2+y^2=1$ 使新增的項與原有的項恰好抵消。
- 從 $r(0)=\frac{1}{2}$ 出發（即 $A=3$），公式給出 $r(2)=1/\sqrt{1+3\mathrm{e}^4}\approx 0.0779$，與 $r'=r^3-r$ 的逐步數值解在許多位小數上吻合。
- 對於 $A=-1$，在 $\theta=-10^{-4}$ 處，$r\approx 70.71$，而到 x 軸的距離為 $0.00707\approx 1/(2r)$，印證了漸近線。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 必須在 r 會變化的情況下以 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ 求得，即漏掉了含 r' 的項。
- 當 $A<0$ 時忽略了限制 $1+A\mathrm{e}^{2\theta}>0$，因而沒有察覺這些曲線在有限的角度便趨向無窮遠。
- 對每種 A 的正負號只畫一條曲線，卻沒有說明其他曲線都是它的旋轉。

STEP 之外

方程 $r' = r^3 - r$ 是一個平面動力系統（dynamical system）的極坐標描述，而單位圓是一個極限環：一條孤立的閉軌道，鄰近的軌跡都盤旋趨向它或離開它。這類徑向方程可以獨立分離出來的系統，是非線性微分方程和相平面分析（phase-plane analysis）課程中的標準入門例子，並引向龐加萊–本迪克森定理（Poincaré–Bendixson theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章很好地講解非線性系統與極限環。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。