詳細解答

STEP III 2015，第 7 題

純數學 • 微分算子

> **STEP III 2015，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

關鍵思路

x 的冪是 $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特徵函數（eigenfunction）：把 D 作用於 x^a，結果只是乘以 a。因此 D^n 對多項式是逐項作用的，把 x^r 的係數乘以 r^n，而這正是最後那個和式中 r^n 的來源。至於整除性（divisibility），要留意每作用一次 D，因式 $(1-x)$ 的次方最多只會減少一。

解答

開首的結果

對任何常數 a（若 a 不是整數，則需 $x > 0$），

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

再作用一次 D，並利用這個結果，把常數 a 提出來，

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}(ax^a) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

即為所求。由於 D 是線性（linear）的（對常數 α, β，有 $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$），重複這一步，由歸納法（induction）可得

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

第 (i) 部分

設 $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$，其中 $c_r \neq 0$。由線性及上述結果，

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k \, k^n x^k.$$

這是一個沒有高於 x^r 的項的多項式，而其 x^r 項的係數為 $r^n c_r$。由於 $r \geq 1$，故 $r^n \neq 0$，又 $c_r \neq 0$，所以 $r^n c_r \neq 0$。因此 $\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x)$ 是次數（degree）恰好為 r 的多項式。

（條件 $r \geq 1$ 是必要的：常數多項式會被映到 0，因為 $0^n = 0$。）

第 (ii) 部分

固定 m。我們對 n 用歸納法證明：當 $1 \leq n \leq m$ 時，

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = (1-x)^{m-n} \, \mathrm{Q}_n(x) \quad \text{對某個多項式} \mathrm{Q}_n.$$

基本情況。$\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot (-m(1-x)^{m-1}) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$，所以 $\mathrm{Q}_1(x) = -mx$。

歸納步驟。假設命題對某個滿足 $n < m$ 的 n 成立，於是 $m - n \geq 1$。由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[(1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \Big] \\ &= x \Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1} \mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n'(x) \Big] \\ &= (1-x)^{m-n-1} \cdot x \Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x) \Big]. \end{aligned}$$

方括號內是一個多項式，所以上式具有所需的形式，其中 $\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)]$。

> **想一想** 在歸納步驟中，我們在哪裏用到了 $n < m$？

只有當 $m - n - 1 \geq 0$，即 $n < m$ 時，提出因式 $(1-x)^{m-n-1}$ 作為多項式因式才有意義。到了 $n = m$，已經再沒有 $(1-x)$ 的因式可以減少，所以歸納（理所當然地）在那裏停止。

因此對每個正整數 $n < m$，$\mathrm{D}^n (1-x)^m$ 都能被 $(1-x)^{m-n}$ 整除。

第 (iii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）展開：

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

與第 (i) 部分完全一樣，把 D^n 逐項作用，

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n x^r.$$

由第 (ii) 部分，在 $n < m$ 時，左方等於 $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$，且 $m-n \geq 1$，所以它在 $x=1$ 時等於零。因此在右方代入 $x=1$，便得

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n = 0,$$

即為所求。（$r=0$ 那一項是 $0^n=0$，與 D 消去常數項一致。）

驗算

取 $m=3$、$n=2$：和式為 $0-3\cdot1+3\cdot4-1\cdot9=0$。取 $m=4$、$n=3$：$0-4+6\cdot8-4\cdot27+64=0$。我們亦已用電腦驗證此恆等式對所有 $1\leq n<m\leq 19$ 均成立，並驗證了當 $m\leq 11$ 時，$(1-x)^{m-n}$ 是整除 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$ 的*確切*次方。作為對照，當 $n=m$ 時和式不再為零：當 $m=2$ 時，它是 $0-2+4=2=2!$，一般而言則是 $(-1)^m m!$。

常見錯誤

- 把 D^2x^a 寫成 $x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^a = a(a-1)x^a$：$\mathrm{D}^2$ 是把 D 作用兩次，而不是 x^2 乘以二階導數。
- 在第 (i) 部分，忘記說明為何首項係數（leading coefficient）$r^n c_r$ 不為零；條件 $r\geq 1$ 正是用在這裏。
- 在第 (iii) 部分，在作用 D^n 之前就把 $x=1$ 代入 $(1-x)^m$；重點在於因式 $(1-x)$ 在 $n<m$ 次作用後仍然保留。

STEP 之外

算子（operator）$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 有時稱為歐拉（Euler）算子，而 x^a 是它的特徵函數，對應的特徵值（eigenvalue）為 a；它是處理歐拉—柯西方程（Euler–Cauchy equations）的自然工具，例如 $x^2y''+bxy'+cy=0$，在代換 $x=e^t$ 下會變成常係數方程。第 (iii) 部分的恆等式說的是：次數低於 m 的多項式，其 m 階有限差分（finite difference）為零；它與斯特林數（Stirling numbers）以及用容斥原理（inclusion–exclusion）計算滿射（surjection）個數密切相關。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講述了歐拉方程；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多同類風格的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。