詳細解答

STEP III 2015，第 6 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP III 2015，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q6

關鍵思路

關於 w、z 這一對數的一切，都由它們的和與積決定，因為 w 和 z 正是 $t^2-(w+z)t+wz=0$ 的兩個根。於是第 (i) 部分其實是在問：一個實係數二次方程（quadratic equation）何時有實根；而條件 $u^2\le 2v$ 不過是喬裝了的判別式（discriminant）。在第 (ii) 部分，頭兩條方程確定了積 wz，第三條方程隨即變成只含 u 的三次方程（cubic equation），而且有一個一眼就能看出的根。

解答

第 (i) 部分

推動整個證明的恆等式（identity）是

$$2v-u^2=2(w^2+z^2)-(w+z)^2=w^2-2wz+z^2=(w-z)^2.$$

我們亦注意到 $wz=\frac{1}{2}((w+z)^2-(w^2+z^2))=\frac{1}{2}(u^2-v)$。

若 w 和 z 是實數：那麼 $u=w+z$ 和 $v=w^2+z^2$ 當然是實數，而由於 $w-z$ 是實數，$2v-u^2=(w-z)^2\ge 0$。所以 $u^2\le 2v$。

反過來，假設 u 和 v 是實數，且 $u^2\le 2v$。那麼 $p=wz=\frac{1}{2}(u^2-v)$ 亦是實數。由於

$$(t-w)(t-z)=t^2-ut+p,$$

w 和 z 恰好是二次方程 $t^2-ut+p=0$ 的兩個根，而這方程的係數都是實數。它的判別式是

$$u^2-4p=u^2-2(u^2-v)=2v-u^2\ge 0,$$

所以兩個根都是實數。因此 w 和 z 是實數，等價關係（equivalence）的證明至此完成。

想一想 為甚麼單靠「u 和 v 是實數」並不足夠？

因為一對共軛複數（conjugate pair）的和與平方和同樣是實數。例如 $w = 1 + 2\mathrm{i}$、$z = 1 - 2\mathrm{i}$ 給出 $u = 2$ 和 $v = -6$，兩者都是實數，但 $u^2 = 4 > -12 = 2v$。這條不等式正正就是用來排除非實數的共軛對。

第 (ii) 部分

化為三次方程。第一條方程說的是 $u = w + z$。記 $v = w^2 + z^2$，第二條方程說 $v = u^2 - \frac{2}{3}$，所以

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

對於立方，我們用標準恆等式

$$w^3 + z^3 = (w+z)^3 - 3wz(w+z) = u^3 - u.$$

因此第三條方程變成 $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$，即

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = 0.$$

代入 $u = 1$ 得 $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$，所以 $u - 1$ 是一個因式，而

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = (u-1)(u^2 + u - \lambda).$$

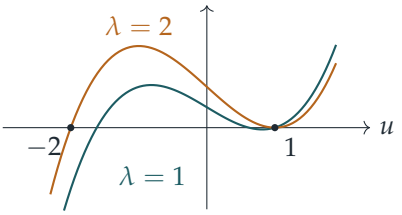
數算根的個數。由於 $\lambda > 0$，二次因式的判別式 $1 + 4\lambda > 0$。所以它有兩個相異實根：

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

其中一個根等於 1，當且僅當 $1^2 + 1 - \lambda = 0$，即 $\lambda = 2$。所以：

- 若 $\lambda \neq 2$，u 的可能值為 1 及 $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}\right)$：共三個相異的值，全部是實數；
- 若 $\lambda = 2$，三次式為 $(u-1)^2(u+2)$，只有兩個值：$u = 1$ 和 $u = -2$。

這些值每一個都確實可以出現：給定 u，取 w 和 z 為 $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$ 的根。那麼 $w + z = u$ 且 $wz = \frac{1}{3}$，把上面的步驟倒過來推，便可知三條方程全部成立。所以例外的值是 $\lambda = 2$。



這幅草圖（已在垂直方向縮放）顯示 $u^3-(1+\lambda)u+\lambda$ 在 $\lambda=1$ 時的圖像，與橫軸有三個分開的交點；以及在 $\lambda=2$ 時的圖像，曲線在 $u=1$ 處剛好與橫軸相切。

w 和 z 是否必然是實數？不是。由於 u 是實數，而 $v=u^2-\frac{2}{3}$ 也是實數，第 (i) 部分告訴我們：w 和 z 是實數當且僅當 $u^2\le 2v=2u^2-\frac{4}{3}$，即當且僅當 $u^2\ge\frac{4}{3}$。無論 λ 取何值，根 $u=1$ 都存在，而 $1<\frac{4}{3}$，所以它總是給出非實數的 w 和 z。

具體來說，$u=1$ 給出 $t^2-t+\frac{1}{3}=0$，所以

$$w=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}},\qquad z=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

驗證一下：$w+z=1=u$；$wz=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，所以 $w^2+z^2=1-\frac{2}{3}=u^2-\frac{2}{3}$；而 $w^3+z^3=u^3-3wz\,u=1-1=0$，所以對任何 $\lambda>0$ 都有 $w^3+z^3-\lambda u=-\lambda$。這是一個反例（counterexample）：$u$ 的三個值全是實數，但 w 和 z 未必是實數。

驗算

- 當 $\lambda=1$ 時，u 的值為 1 及 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})\approx 0.618,\,-1.618$，每一個都滿足 $u^3-2u+1=0$。
- 當 $\lambda=2$ 時，三次式 u^3-3u+2 在 $u=-2$ 處為零（$-8+6+2=0$），而它及其導數（derivative）$3u^2-3$ 在 $u=1$ 處都為零，證實了這是重根（double root）。
- 用電腦對大量 λ 值進行檢查：由每個 u 構造出 w 和 z，確認三條方程在捨入誤差範圍內成立；檢查亦發現除了 $\lambda=2$ 以外，u 都有三個相異的值。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。逆命題需要積 wz 是實數，而這正是用到 v 是實數的地方。
- 忘記檢查二次因式的根是否與 1 不同，因而漏掉了例外值 $\lambda=2$。
- 以為 u 是實數，w 和 z 就必定是實數。w 和 z 的實值對稱函數同樣可以來自一對共軛複數。

STEP 之外

一對數（或任何一組數）由其對稱函數決定——這個想法是對稱多項式（symmetric polynomial）理論的起點：任何關於 w 和 z 的對稱多項式都可以用 $w+z$ 和 wz 表示，而牛頓（Newton）恆等式則把 w^3+z^3 這類冪和（power sum）與它們聯繫起來。同樣的推

理，配合判別式，可以判定一個實係數多項式的根何時全是實數。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）是學習複數的絕佳良伴，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則把對稱多項式的討論推得更遠。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。