詳細解答

STEP III 2015，第 5 題

純數學 • 以遞降法證明無理性

STEP III 2015，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 1.3 節最小反例中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/well-ordering.html

關鍵思路

這是無窮遞降法（infinite descent）的證明：假如 $\sqrt{2}$ 是有理數（rational），那麼必定存在一個最小的正整數，使 $\sqrt{2}$ 乘以它之後變成整數；然後我們構造出一個更小的這樣的數。乘以 $\sqrt{2}-1$ 正好能做到這一點，因為它是介乎 0 與 1 之間的數，而且乘了之後仍留在該集合之內。對於 2 的立方根（cube root），同一招數需要一個同時照顧 $2^{2/3}$ 的集合，這就是題目為何先要求你把這兩個數聯繫起來。

解答

第 (i) 部分

第 3 步。根據第 1 步的假設，對某些整數 p 和 q（$q \neq 0$），有 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$。由於 $\sqrt{2} > 0$，我們可取 p 和 q 皆為正數。於是

$$q\sqrt{2} = p$$

是整數，而 q 是正整數，所以 $q \in S$。因此 S 非空。

第 5 步。由於 $k \in S$，數 $m = k\sqrt{2}$ 是整數。關於 $n = (\sqrt{2}-1)k$，我們需要驗證兩件事。

- n 是正整數：$n = k\sqrt{2} - k = m - k$ 是兩個整數之差，而且由於 $k > 0$ 及 $\sqrt{2} > 1$，有 $n > 0$。

- $n\sqrt{2}$ 是整數：
$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$
同樣是兩個整數之差。

所以 $(\sqrt{2}-1)k \in S$。

第 6 步。由於 $1 < \sqrt{2} < 2$（因為 $1 < 2 < 4$），我們有 $0 < \sqrt{2}-1 < 1$，因此由 $k > 0$ 得
$$(\sqrt{2}-1)k < k.$$
於是第 5 步給出了 S 中一個比 k 小的正整數，與第 4 步中選取 k 為 S 的最小元素相矛盾（contradiction）。（第 4 步是合理的，因為每個非空的正整數集合都有最小元素，而第 3 步已證明 S 非空。）整個論證唯一的假設是第 1 步，所以它必定是錯的：$\sqrt{2}$ 是無理數（irrational）。

第 (ii) 部分

記 $a = 2^{1/3}$，則 $a^2 = 2^{2/3}$ 及 $a^3 = 2$。

等價性（equivalence）。若 a 是有理數，則 a^2 作為有理數的乘積亦是有理數。反過來，若 a^2 是有理數，則由於 $a^2 \neq 0$，
$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$
是有理數。所以 $2^{1/3}$ 是有理數當且僅當 $2^{2/3}$ 是有理數。

無理性。用反證法，假設 a 是有理數。根據等價性，a^2 亦是有理數。定義 T 為所有使 na 與 na^2 同時為整數的正整數 n 所組成的集合。

> ? **想一想** 為何不直接照搬第 (i) 部分，取 $S = \{n : na \text{ 是整數}\}$？

在第 (i) 部分中，驗證 $(\sqrt{2}-1)k \in S$ 時需要 $k(\sqrt{2})^2 = 2k$ 是整數，而這是自動成立的。在這裏，把 $(a-1)k$ 乘以 a 得到 $ka^2 - ka$，但條件「ka 是整數」並沒有告訴我們 ka^2 是整數。所以我們把這一點寫進集合的定義之中，而這正是需要本部分前半的地方。

T 非空。記 $a = \frac{p}{q}$，其中 p、q 為正整數。則 $q^2 a = pq$ 及 $q^2 a^2 = p^2$ 都是整數，所以 $q^2 \in T$。

遞降。設 k 為 T 的最小元素，則 $u = ka$ 及 $v = ka^2$ 都是整數。考慮 $n = (a-1)k$。

- $n = u - k$ 是整數，而且由於 $a > 1$（因為 $1^3 < 2$），有 $n > 0$。
- $na = ka^2 - ka = v - u$ 是整數。
- 利用 $a^3 = 2$，$na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$ 是整數。

所以 $n \in T$。但 $a < 2$（因為 $2^3 = 8 > 2$），所以 $0 < a - 1 < 1$，從而 $n = (a-1)k < k$，與 k 的極小性（minimality）相矛盾。因此 $2^{1/3}$ 是無理數，而根據等價性，$2^{2/3}$ 亦是無理數。

驗算

- 在一個「差一點」的例子上試試遞降。分數 $\frac{7}{5}$ 很接近 $\sqrt{2}$；第 5 步中的映射 $(k, m) \mapsto (m-k, 2k-m)$ 把 $(5,7)$ 映到 $(2,3)$，而 $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$。量 $m^2 - 2k^2$ 只會改變正負號，所以假如它等於 0（即 $m = k\sqrt{2}$），它會一直保持為 0，而 k 卻不斷變小，這是不可能的。
- 數值上，$\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 及 $2^{1/3} - 1 \approx 0.260$，兩者都嚴格介乎 0 與 1 之間，正如遞降所需。
- 用電腦搜尋所有 $n \leq 2 \times 10^5$，找不到任何 n 使 $2n^2$ 為完全平方數，亦找不到任何 n 使 $2n^3$ 或 $4n^3$ 為完全立方數。

常見錯誤

- 忘記證明 $(\sqrt{2} - 1)k$ 是正數：S 只包含正整數，所以這一步是必需的。
- 在第 (ii) 部分中，使用只以 na 定義的集合，然後毫無理據地斷言 ka^2 是整數。
- 沒有說明最小元素 k 為何存在：這需要 S（或 T）非空，而這正是第 3 步的目的。

STEP 之外

這個論證其實關乎正整數的良序性（well-ordering），也就是歸納法（induction）背後的原理，而且它可以推廣：若 $\sqrt[r]{N}$ 不是整數，則它是無理數。要看出這一點，可取所有使 $n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$ 全都是整數的 n 所組成的集合，再把其最小元素乘以 $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$，而這個數嚴格介乎 0 與 1 之間。在第一個代數課程中，這會變成以下命題：整數構成一個整閉（integrally closed）環——整數係數首一多項式（monic polynomial）的有理根必定是整數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步認識整數及其性質的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。