詳細解答

STEP III 2015，第 4 題

純數學 • 三次方程的根

STEP III 2015，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q4

關鍵思路

第 (iii) 部分的三個條件看似一道三角謎題，但每一個其實都是某個量的虛部（imaginary part）：當 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ 時，$r_k^n \sin(n\theta_k)$ 正是 z_k^n 的虛部。因此，這些條件表示三個複數的冪和（power sum）S_1、S_2、S_3 都是實數。第 (ii) 部分把實數冪和轉化為一個實係數（real coefficients）三次方程（cubic），而第 (i) 部分則隨即給我們一個實根（real root）。

解答

第 (i) 部分

對實數 x，設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$；這是一個連續（continuous）實函數。令 $R = 1 + |a| + |b| + |c|$。當 $x \geq R$ 時，有 $x \geq 1$，所以 $|x| \leq x^2$ 及 $1 \leq x^2$，從而 $|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$。因此

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2(x - |a| - |b| - |c|) > 0.$$

同理，當 $x \leq -R$ 時，得 $f(x) \leq -|x|^2(|x| - |a| - |b| - |c|) < 0$。所以 $f(-R) < 0 < f(R)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知 f 在 $-R$ 與 R 之間有一個零點。這個零點就是 $(*)$ 的一個實根。

（等價的說法：實多項式（polynomial）的非實根必定成共軛（conjugate）對出現，而三個根不可能全部兩兩配對。）

第 (ii) 部分

由於 z_1、z_2、z_3 是方程的根，

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

比較係數（comparing coefficients）得

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

所以 $a = -S_1$。把和平方，得 $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$，故

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

至於 c，與其展開 S_1^3，不如利用每個根都滿足方程這一事實：對 $k = 1,2,3$，有 $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$。把這三條方程相加，得

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

代入 a 和 b，再乘以 2：

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1(S_1^2 - S_2) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

即為所求。

第 (iii) 部分

對 $k = 1,2,3$，定義 $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$。由棣美弗定理(de Moivre's theorem)，$z_k^n = r_k^n(\cos n\theta_k + \mathrm{i}\sin n\theta_k)$，所以題目給出的三個條件恰好表示

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

其中 S_1、S_2、S_3 是 z_1、z_2、z_3 的冪和，定義與第 (ii) 部分相同。所以 S_1、S_2、S_3 全是實數。

? **想一想** 第 (ii) 部分是從一個三次方程出發的。這裏的三次方程在哪裏？

我們自己構造它：以 $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$ 定義 a、b、c。那麼 z_1、z_2、z_3 就是這個三次方程的根，於是第 (ii) 部分適用，得

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \qquad c = \tfrac{1}{6}(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3),$$

它們全是實數。由第 (i) 部分，這個三次方程有一個實根，而它的根只有 z_1、z_2、z_3，所以某個 z_k 是實數。由於 $r_k > 0$，$z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ 是實數當且僅當 $\sin\theta_k = 0$，即 θ_k 是 π 的整數倍；在 $-\pi < \theta_k < \pi$ 範圍內，唯一這樣的值是 $\theta_k = 0$。所以至少有一個 k 使 $\theta_k = 0$。

現在設 $\theta_1 = 0$，於是 $z_1 = r_1$ 是非零實數。那麼

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad 及 \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

都是實數。因此 z_2 和 z_3 是二次方程（quadratic）$z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$ 的根，而這個方程的係數都是實數。分兩種情況。

- 若兩根是非實數，則它們互為共軛複數：$z_3 = \overline{z_2} = r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$。由於 $-\theta_2$ 同樣位於 $(-\pi, \pi)$ 內，而在這個區間內輻角（argument）是唯一的，所以 $\theta_3 = -\theta_2$（且 $r_3 = r_2$）。
- 若兩根是實數，則與上面完全相同的推理（每個根的模（modulus）為正，輻角位於 $(-\pi, \pi)$ 內）給出 $\theta_2 = \theta_3 = 0$，所以同樣有 $\theta_2 = -\theta_3$。

無論哪種情況，都有 $\theta_2 = -\theta_3$，即為所求。

驗算

- 用根 $1, 2, 3$ 驗證第 (ii) 部分：$S_1 = 6$、$S_2 = 14$、$S_3 = 36$，而 $-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$，其中 $c = -6$，正與 $(z-1)(z-2)(z-3)$ 相符。
- 反方向驗證第 (iii) 部分：當 $\theta_1 = 0$、$\theta_3 = -\theta_2$ 及 $r_3 = r_2$ 時，每個和的第二項與第三項互相抵消，而第一項為零，所以三個條件全部成立。用電腦從數千個隨機起點以數值方法求解這三個條件，找到的解全都是一個角為零、另外兩個角互為相反數。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，未加論證便說「三次曲線必定穿過軸」；$|x|$ 很大時的變號需要一行推理來支持。
- 在第 (iii) 部分，忘記 $\theta_k = \pm\pi$ 同樣會令 z_k 成為實數；正是開區間 $(-\pi, \pi)$ 排除了這個可能。
- 只從共軛的情況得出 $\theta_2 = -\theta_3$，卻忽略了 z_2、z_3 都是實數的情況。

STEP 之外

多項式的係數是其根的基本對稱函數（elementary symmetric functions），而第 (ii) 部分的恆等式正是把它們與冪和聯繫起來的牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）的頭幾條。大學的第一門代數課會證明：根的任何對稱多項式（symmetric polynomial）都可以寫成基本對稱函數的多項式，而這正是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是閱讀這方面內容的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。