詳細解答

STEP III 2015，第 3 題

純數學 • 極坐標曲線與面積

> **STEP III 2015，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q3

關鍵思路

曲線 $r = a\sec\theta$ 其實就是直線 $x = a$，因為 $r\cos\theta = x$。因此 $r - a\sec\theta$ 量度的是：沿着從原點出發、角度為 θ 的射線，一點與該射線和直線交點之間的距離；而方程表示這個距離等於 b。這正是蚌線（conchoid）的定義，其中定點就是極點（pole）。至於作圖，可把絕對值（modulus）拆開成 $r = a\sec\theta + b$ 和 $r = a\sec\theta - b$，再逐一考慮哪些 θ 值使 $r \geq 0$。

解答

全題中，$\sec\theta$ 在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 時無定義，因此這些角度須排除。去掉絕對值後，$(*)$ 表示

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{或} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

而無論哪種情況，我們都需要 $r \geq 0$。

第 (i) 部分

為何 $\sec\theta > 0$。假設 $\sec\theta < 0$。由 $|\cos\theta| \leq 1$ 得 $\sec\theta \leq -1$，所以 $a\sec\theta \leq -a$。於是 r 的兩個可能值都滿足

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

這裏用了 $a > b$。這與 $r \geq 0$ 矛盾，所以每個滿足 $(*)$ 的點都有 $\sec\theta > 0$，即 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。

蚌線。取 A 為極點 O，L 為直線 $x = a$（極坐標形式為 $r\cos\theta = a$，即 $r = a\sec\theta$），並取 $d = b$。注意由於 $a > 0$，A 不在 L 上。

設 P 滿足 $(*)$，其極角為 θ，所以 $\cos\theta > 0$。直線 OP 不與 L 平行，它與 L 相交於同一射線上的點 Q，且 $OQ = a\sec\theta$，即以直角坐標（Cartesian coordinates）表示為 $Q = (a, a\tan\theta)$。由於 O、Q 和 P 都在從 O 出發的同一條射線上，與 O 的距離分別為 $a\sec\theta$ 和 r，

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

所以沿着一條經過 $A = O$ 的直線量度，P 與 L 的距離為 b：它位於以此 L、A 及 $d = b$ 構成的尼科梅德斯（Nicomedes）蚌線上。

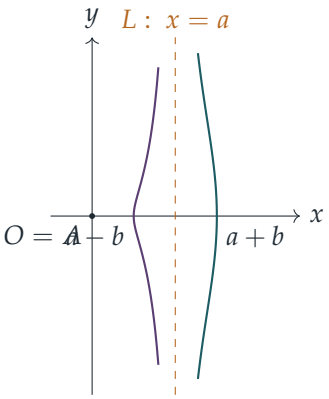
（反過來，該蚌線上的每一點都滿足 $(*)$：在任何經過 O 並與 L 相交於 Q 的直線上，與 Q 距離為 b 的兩點，沿射線 OQ 與 O 的距離為 $a\sec\theta \pm b$，由於 $a\sec\theta \geq a > b$，兩者皆為正數。所以軌跡就是整條蚌線。）

作圖。在直角坐標中，$x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$，而 $y = r\sin\theta$。把 $r - a\sec\theta = \pm b$ 乘以 $\cos\theta$，得 $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$，所以曲線為

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

曲線有兩個分支（branch），兩者都關於 x 軸對稱（以 $-\theta$ 代替 θ 即可見），而當 $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ 時 $r \to \infty$，兩者都以 L 為漸近線（asymptote）：

- 外分支 $r = a\sec\theta + b$，其中 $x = a + b\cos\theta \in (a, a+b]$，與軸相交於 $(a+b, 0)$；
- 內分支 $r = a\sec\theta - b$，其中 $x = a - b\cos\theta \in [a-b, a)$，與軸相交於 $(a-b, 0)$，該點位於 O 的右方。



（圖中取 $a = 2$、$b = 1$：外分支以藍綠色表示，內分支以梅紫色表示。）

第 (ii) 部分

現在 $a < b$。再逐一檢查兩種情況，看看何時 $r \geq 0$。

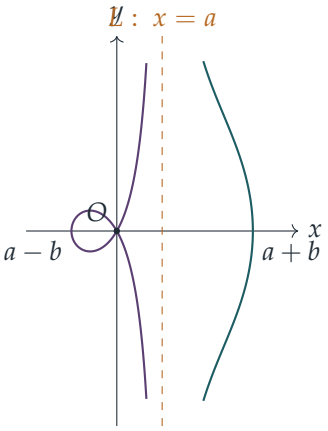
- $r = a\sec\theta + b$。若 $\sec\theta > 0$，它必為正數：這就是與之前相同、位於 L 右方的外分支。若 $\sec\theta < 0$，則 $r \geq 0$ 當且僅當 $-a\sec\theta \leq b$，即 $|\sec\theta| \leq b/a$，即 $\cos\theta \leq -a/b$。
- $r = a\sec\theta - b$。若 $\sec\theta < 0$，它為負數，所以沒有點。若 $\sec\theta > 0$，則 $r \geq 0$ 當且僅當 $\sec\theta \geq b/a$，即 $0 < \cos\theta \leq a/b$。

設 $\alpha = \arccos(a/b)$，由於 $0 < a/b < 1$，它位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內。

想一想 $\sec\theta < 0$ 的那一部分是甚麼樣子？

它是 $r = b + a\sec\theta$，其中 $\cos\theta \leq -a/b$，即 $\pi - \alpha \leq |\theta| \leq \pi$。在兩端，$\cos\theta = -a/b$ 給出 $r = b - b = 0$，所以它在原點開始，也在原點結束。在 $\theta = \pi$ 時得 $r = b - a$，即負 x 軸上的點 $(a - b, 0)$。在兩端之間 $r > 0$，而曲線關於 x 軸對稱，所以這部分是原點左方的一個閉環，位於 $a - b \leq x \leq 0$ 之內（因為 $x = a + b\cos\theta$）。

內分支 $r = a\sec\theta - b$（其中 $\alpha \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$）同樣從原點開始（該處 $\cos\theta = a/b$），並當 $|\theta| \to \frac{\pi}{2}$ 時伸向漸近線 L，一直保持在 $0 \leq x < a$ 之內。所以內分支與閉環合起來構成一條在 O 自身相交的曲線，在該處的切線方向為 $\theta = \pm\alpha$。



（圖中取 $a = 1$、$b = 2$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$。外分支以藍綠色表示；內分支連同閉環以梅紫色表示。）

$a = 1$、$b = 2$ **時閉環的面積**。此時 $\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ 表示 $\frac{2\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi$，而在閉環上 $r = 2 + \sec\theta$。當 θ 走遍這個範圍時，射線恰好掃過閉環一次，所以面積為 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用關於 x 軸的對稱性，我們取上半部分 $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ 的兩倍：

$$\begin{aligned}\text{面積} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4 + 4\sec\theta + \sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[4\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \tan\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}.\end{aligned}$$

題目給出的 $\sec\theta$ 的原函數（antiderivative）在此適用，因為區間不包含 $\frac{\pi}{2}$。在 $\theta=\pi$：$\sec\theta=-1$，$\tan\theta=0$，所以括號內的值為 $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$。在 $\theta=\frac{2\pi}{3}$：$\sec\theta=-2$，$\tan\theta=-\sqrt{3}$，所以括號內的值為 $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$。相減，得

$$\text{閉環的面積}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

驗算

- 數值上，面積為 $4.1888+1.7321-5.2678\approx 0.6530$。它是正數，理應如此；而且相比能容納閉環的矩形 $-1\le x\le 0$、$|y|\le 0.45$（面積為 0.9）也較小。直接以數值方法在 $[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上積分 $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$，同樣得到 0.65301。
- 閉環經過 O 和 $(-1,0)$：在 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，$r=2-2=0$；在 $\theta=\pi$，$r=2-1=1$。
- 在第 (i) 部分的曲線上取一點，例如 $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{4}$：則 $r=2\sqrt{2}+1$，而射線與 L 相交於 $(2,2)$，與 O 的距離為 $2\sqrt{2}$，所以該點在交點之外 $1=b$ 的位置。

常見錯誤

- 忘記條件 $r\ge 0$。正是這個條件迫使第 (i) 部分中 $\sec\theta>0$，也決定了第 (ii) 部分中閉環的 θ 範圍。
- 在 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 上積分閉環，即穿過漸近線方向，而不是從 $r=0$ 的 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 開始。
- 在第二象限處理 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ 時出現正負號錯誤；該象限中 $\sec\theta$ 和 $\tan\theta$ 皆為負數。

STEP 之外

蚌線由尼科梅德斯約於公元前 200 年發明，用來三等分角和求立方根；這些問題單靠直尺和圓規是不可能解決的，而不可能性的證明來自域論（field theory），在大學第一個代數課程中便會接觸到（見 Allenby，*Rings, Fields and Groups*《環、域與羣》）。第 (ii) 部分中在原點的自交點是一個結點（node），是代數曲線（algebraic curve）上奇點（singular point）的一個例子，這裏的代數曲線是四次曲線 $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$。更多 STEP 風格的曲線作圖題，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*《高等數學問題》。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。