詳細解答

STEP III 2015，第 2 題

純數學 • 分析學

> **STEP III 2015，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 2.1 節「最終」是甚麼意思中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/eventually.html

關鍵思路

關係 $(s_n) \leq (t_n)$ 的意思是「最終（eventually）$s_n \leq t_n$」：我們可以不理會前面任意有限多項。因此，要證明一個命題為真，就要指出一個位置 m，保證由此以後不等式（inequality）必定成立；要證明一個命題為假，則要找出一對數列（sequence），使任何 m 的選擇都行不通。時刻問自己：這個結果是從哪一個 n 開始成立的？

解答

第 (i) 部分

正確。對正整數 n，我們可以除以 $n > 0$，所以

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

因此只要 $n \geq 1000$，便有 $1000n \leq n^2$，取 $m = 1000$ 即可。（更小的 m 都不行，因為 $1000 \cdot 999 > 999^2$。）

第 (ii) 部分

錯誤。陷阱在於「並非最終 $s_n \le t_n$」只告訴我們 $s_n > t_n$ 對無限多個 n 成立，而不是最終成立。兩個數列可以不斷互相超越。取

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

於是 s_n 依次為 $1, 3, 1, 3, \ldots$，而兩個數列的每一項都是正數。

- $(s_n) \le (t_n)$ 不成立：無論提出哪個正整數 m，總有偶數 $n \ge m$，而對這個 n 有 $s_n = 3 > 2 = t_n$。
- $(t_n) \le (s_n)$ 也不成立：無論提出哪個 m，總有奇數 $n \ge m$，而對這個 n 有 $t_n = 2 > 1 = s_n$。

所以命題的假設成立，但結論不成立。

第 (iii) 部分

正確。根據假設，存在正整數 m_1，使得對所有 $n \ge m_1$ 都有 $s_n \le t_n$；又存在正整數 m_2，使得對所有 $n \ge m_2$ 都有 $t_n \le u_n$。設

$$m = \max(m_1, m_2).$$

若 $n \ge m$，則 $n \ge m_1$ 且 $n \ge m_2$，所以兩個不等式在 n 處都成立，得

$$s_n \le t_n \le u_n.$$

因此只要 $n \ge m$ 便有 $s_n \le u_n$，這正是 $(s_n) \le (u_n)$。

> ? **想一想** 為甚麼不直接取 $m = m_1$，或者 $m = m_1 + m_2$？

取 $m = m_1$ 行不通，因為當 $m_1 \le n < m_2$ 時，我們對 t_n 與 u_n 的大小關係一無所知。我們需要 n 同時越過兩個門檻（threshold），而 $\max(m_1, m_2)$ 是能保證這一點的最小選擇。（$m_1 + m_2$ 也可以，但不必要地大。）

第 (iv) 部分

正確，取 $m = 4$。一個簡短的表格顯示應從哪裏開始：

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

不等式在 $n = 1, 2$ 時成立，在 $n = 3$ 時不成立，從 $n = 4$ 起又再成立。所以 $m = 4$ 是最小的可能選擇，我們用歸納法（induction）證明對所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$。

基本情況（*base case*）。當 $n = 4$ 時，$n^2 = 16 = 2^4$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $n \geq 4$ 且 $n^2 \leq 2^n$。由於 $n \geq 3$，有 $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$，所以 $2n + 1 < n^2$。因此

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{因為} 2n+1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{由歸納假設（inductive hypothesis）} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

所以結果對 n 成立可推出對 $n+1$ 成立，由歸納法，對每個 $n \geq 4$ 都有 $n^2 \leq 2^n$。因此 $(n^2) \leq (2^n)$，取 $m = 4$。

想一想 歸納法究竟在哪一步需要 n 足夠大？

只在 $2n + 1 < n^2$ 這一步，它需要 $n \geq 3$。這就是歸納法不能從 $n = 1$ 開始的原因：由 $n = 2$ 推到 $n = 3$ 的一步要用到 $5 < 4$，這是錯的，而事實上 $3^2 > 2^3$。

驗算

- 第 (i) 部分：當 $n = 1000$ 時兩邊都等於 10^6；當 $n = 999$ 時，$999\,000 > 998\,001$。
- 第 (iv) 部分：用電腦對 4 至 2000 的每個 n 檢驗 $n^2 \leq 2^n$，結果都成立；上面的表格亦確認了 $n = 3$ 時不成立。要感受 2^n 勝出得有多快：$20^2 = 400$，但 $2^{20} = 1\,048\,576$。
- 第 (ii) 部分：無論你嘗試哪個 m，都會被下一個偶數 n（對其中一個次序）及下一個奇數 n（對另一個次序）推翻。

常見錯誤

- 把「並非最終 $\leq$」當成「最終 $>$」。「存在 m，使得對所有 $n \geq m$……」的否定（negation）是「對每個 m，都存在某個 $n \geq m$ 使得 $s_n > t_n$」。
- 在 (iv) 中從 $n = 1$ 或 $n = 2$ 開始歸納：歸納步驟在那裏確實不成立。
- 在 (iii) 中，兩個假設都用同一個字母 m，彷彿兩個門檻必須相同。

STEP 之外

這裏的關係正是貫穿整個實分析（real analysis）的「最終」量詞（quantifier）：一個數列收斂（converges），是指對每一個容許誤差，它最終都落在其極限的該誤差範圍之內。第 (ii) 部分顯示，與實數上的次序不同，數列的這種次序並不是全序（total order）：兩個數列未必可以互相比較。電腦科學家在大 O 記號（big-O notation）中使用同一個概念，而 (iv) 就是「指數函數最終勝過多項式」這個熟悉的事實。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本親切易讀的書，可以從中看到這類量詞論證如何被系統化。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。